Appunti sulle Reti di Petri

Marco Liverani*

13 maggio 2004

1 Introduzione

Le Reti di Petri, proposte nel 1962 da Carl Adam Petri, sono uno strumento per la modellizzazione di processi ed in particolare per la modellizzazione delle comunicazioni e delle interazioni fra processi paralleli. Nella descrizione di un processo (produttivo, organizzativo, ecc.) spesso si ha la necessità di rappresentare sottoprocessi o attività che possono essere eseguite contemporaneamente, in parallelo fra loro, ma non indipendentemente l'una dall'altra: potrebbe accadere che un determinato passaggio o una certa fase del processo non possa verificarsi o non possa essere attivata fintanto che altre fasi o attività non sono concluse o fino al verificarsi di determinate condizioni. Per chiarire meglio questo aspetto diciamo che, ad esempio, situazioni di qusto tipo non possono essere descritte mediante un diagramma di flusso, come quelli utilizzati correntemente per la descrizione di un algoritmo nell'ambito della programmazione strutturata. In un diagramma di flusso le attività sono rigidamente serializzate: due rami distinti di un diagramma di flusso non vengono mai "percorsi" contemporaneamente, ma rappresentano due strade alternative scelte secondo un criterio rigidamente deterministico dipendente dall'esito della valutazione di una espressione booleana. Con le Reti di Petri questo limite (la serializzazione degli step del procedimento) viene superato, ma viene anche introdotto un formalismo grafico e semantico che permette di aggiungere una "dimensione" ulteriore alle Reti di Petri rispetto ai diagrammi di flusso. Le RdP infatti non solo permettono di rappresentare e di descrivere globalmente un processo, ma consentono anche di seguirne l'evoluzione permettendo di visualizzare lo *stato* in cui si trova in un certo istante la rete.

Ad esempio, supponiamo di voler descrivere il processo per la preparazione di un piatto di spaghetti al pomodoro. Il procedimento può essere rappresentato con il seguente algoritmo:

1. soffriggi la cipolla
2. quando il soffritto è pronto aggiungi il pomodoro
3. quando il sugo è cotto metti a bollire l'acqua
4. quando l'acqua bolle aggiungi il sale
5. butta gli spaghetti nell'acqua bollente
6. attendi 8 minuti
7. scola gli spaghetti
8. condisci gli spaghetti con il sugo

*liverani@mat.uniroma3.it

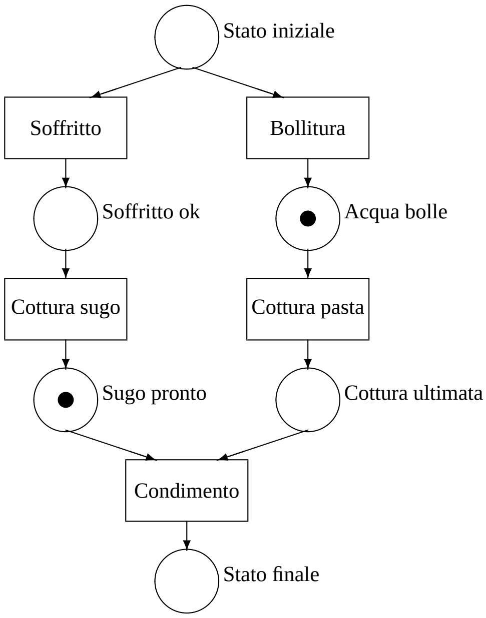

Figura 1: Processo di preparazione degli spaghetti al pomodoro

Il grosso limite di questa descrizione (un po' approssimativa) del procedimento è che sicuramente finiremo per mangiare gli spaghetti con il sugo freddo. Questo processo mette in evidenza diversi aspetti che non si prestano bene ad essere rappresentati con un algoritmo strettamente seriale. Ad esempio esisono delle fasi rigidamente sequenziali (non posso iniziare la cottura della salsa di pomodoro fino a quando il soffritto non è pronto), mentre ne esistono altre fra loro indipendenti e che possono essere facilmente parallelizzate (la cottura del sugo e degli spaghetti), ed altre ancora che dipendono dal completamento di più fasi tra loro indipendenti (non posso condire gli spaghetti fino a quando non è completata la preparazione del sugo e la cottura della pasta).

2 Definizione e rappresentazione grafica

Una Rete di Petri è un grafo che consiste di *posti*, *transizioni* ed archi che li collegano; gli archi di input collegano i posti con le transizioni, mentre gli archi di output collegano le transizioni con i posti.

In modo più preciso possiamo dire che una Rete di Petri è un grafo orientato bipartito $G = (S,T;E)$, dove (S,T) è una partizione dell'insieme dei vertici del grafo ed E è l'insieme degli spigoli di G, composto da coppie di vertici rispettivamente di S (i *posti* e di T (le *transizioni*): $E = \{(u,v) : u \in S \text{ e } v \in T \text{ oppure } u \in T \text{ e } v \in S\}$.

Grafo bipartito di posti e transizioni

Nella rappresentazione grafica della rete i posti, vertici di S, saranno rappresentati con dei cerchi, mentre le transizioni, vertici di T, saranno rappresentati con dei rettangoli.

Rifacendoci all'esempio della preparazione degli spaghetti al pomodoro, lo stesso procedimento può essere descritto con una Rete di Petri rappresentata dal grafo riportato in figura 1.

Lo *stato* della rete indica una sua configurazione in un determinato istante dell'esecuzione del processo descritto dalla rete stessa. Lo stato viene rappresentato graficamente collocando dei *token* nei vertici di tipo S del grafo. In altri termini possiamo dire che una Rete di Petri evolve passando attraverso una serie di stati; si conferisce uno stato a una Rete di Petri mediante una marcatura che consiste nell'assegnamento di un numero naturale ad ogni posto. Graficamente, questo si traduce nell'inserimento in ogni posto di un numero equivalente di token. I token indicano lo stato di avanzamento delle operazioni descritte nei passi del processo. Ad esempio lo stato rappresentato in figura 1 evidenzia che l'acqua è giunta ad ebollizione e che la cottura del sugo è completata: in questo modo è evidente che il processo è stato parallelizzato in due sottoprocessi contemporanei e non alternativi; per poter passare ad eseguire la fase del condimento degli spaghetti è necessario attendere che la cottura della pasta sia ultimata (non basta infatti che il sugo sia pronto!). Anche questo aspetto, della sincronizzazione dei sottoprocessi, sarà chiarito meglio in seguito.

Stato della rete e marcatura

Posti e token

Transizioni

I posti quindi possono contenere i token; lo stato del sistema rappresentato dal modello è dato dal numero di token collocati in ogni posto della rete. Le transizioni invece rappresentano le componenti "attive" del modello. Rappresentano le attività che possono essere realizzate modificando lo stato della rete (ossia la collocazione dei token nei posti). Le transizioni sono consentite (ossia possono essere realizzate) soltanto se sono *abilitate*, ossia soltanto se tutte le condizioni che le precedono sono verificate. Quando viene attivata una transizione vengono rimossi i token dai posti che precedono la transizione e alcuni token vengono collocati in ognuno dei posti che seguono la transizione stessa. Il numero di token rimossi ed aggiunti dipende dal tipo di rete.

Abilitazione delle transizioni

Come "strumento grafico" le Reti di Petri possono quindi essere utilizzate come supporto alla descrizione ed alla comunicazione, così come spesso vengono utilizzati i diagrammi di flusso, i diagrammi a blocchi e le reti. Inoltre, come abbiamo detto, l'utilizzo dei token aggiunge al "disegno" anche la possibilità di simulare la dinamica e le attività concorrenti presenti nel sistema.

Precondizioni e postcondizioni

Data una Rete di Petri $G = (S, T; E)$, se $(s_1, t) \in E$ è uno spigolo della rete tale che $s_1 \in S$ e $t \in T$, allora s_1 è una *precondizione* di t; se $(t, s_2) \in E$, con $s_2 \in S$ e $t \in T$, allora s_2 è una delle *postcondizioni* di t. Dato un certo vertice $t \in T$, indicheremo con $\bullet t$ l'insieme delle sue precondizioni e con $t\bullet$ l'insieme delle sue postcondizioni.

Marcatura e raggiungibilità

In generale chiameremo *marcatura* di una rete una disposizione dei token nei posti della rete stessa. Una marcatura M_1 si dice *raggiungibile* a partire da una determinata marcatura M se esiste almeno una sequenza di transizioni tali che facendole scattare a partire da M si ottenga la marcatura M_1. L'insieme delle marcature raggiungibili dalla marcatura M è indicato con $[M\rangle$. Quindi, per indicare che la marcatura M^* è raggiungibile da M scriveremo $M^* \in [M\rangle$.

Vivezza di una marcatura e di una transizione

Una marcatura M si dice *viva* se e solo se, scelta una qualsiasi transizione t della rete, da M si può raggiungere una marcatura M^* nella quale t è abilitata; in altre parole, una marcatura M è viva se e solo se, facendo evolvere la rete a partire da essa, non esistono transizioni che non si riesce ad abilitare. Formalmente scriveremo che la marcatura M è viva se e solo se $\forall t \in T\ \exists M^* \in [M\rangle$ tale che t è abilitata in M^*. Analogamente diremo che una transizione t è viva se esiste una marcatura M^* raggiungibile a partire dalla marcatura iniziale, tale che M^* abilita t.

Vivezza di una rete

Una rete di Petri si dice *viva* se e solo se tutte le marcature raggiungibili dalla marcatura iniziale sono vive. Si dice anche che una rete è viva se e solo se tutte le sue transizioni sono vive.

3 Notazione matriciale ed equazione di stato

Una Rete di Petri può anche essere rappresentata mediante una notazione matriciale, al pari di come possono essere rappresentati i grafi mediante matrici di adiacenza o di incidenza. In particolare una Rete di Petri può essere rappresentata mediante due matrici, di ingresso I e di uscita O, definite rispettivamente ponendo $I_{s,t} = w(s,t)$ e $O_{t,s} = w(t,s)$, $\forall t \in T$ e $\forall s \in S$; con $w(u,v)$ si indica la capacità dello spigolo $(u,v) \in E$. In altri termini la colonna i-esima della matrice I rappresenta i pesi degli archi entranti nella transizione $t_i \in T$, mentre la riga j-esima di O rappresenta i pesi degli spigoli uscenti dalla transizione $t_j \in T$. Per convenzione si pone $I_{s,t} = 0$ se $(s,t) \notin E$ e $O_{t,s} = 0$ se $(t,s) \notin E$.

Notazione matriciale

La *matrice di incidenza* C di una rete è definita ponendo $C = O - I$. Il *vettore di marcatura* m di una rete è il vettore $m = (m_1, m_2, \dots, m_{|S|})$ le cui componenti $m_i \geq 0$ sono il numero di token presenti nel posto i-esimo.

Matrice di incidenza

Una *sequenza di scatti* s è una sequenza di transizioni $t_i \in T$ tali che t_1 è abilitata dalla marcatura iniziale e lo scatto di t_i porta ad abilitare la transizione t_{i+1}; indicheremo la transizione con $s = t_1 t_2 \dots t_n$.

Sequenza di scatti

Il *vettore delle occorrenze* S associato ad una sequenza di scatti è un vettore colonna di dimensione $|T|$, $S = (s_1, s_2, \dots, s_{|T|})$, in cui s_i rappresenta il numero di volte in cui avviene la transizione t_i nella sequenza di scatti s.

Vettore delle occorrenze

Sia M_0 la marcatura iniziale della rete e sia C la matrice di incidenza. Sia S il vettore delle occorrenze di una sequenza di scatti s applicata alla rete e sia M_1 la marcatura raggiunta dopo tale sequenza di scatti ($M_0[S\rangle M_1$). Allora risulta

$$M_1 = M_0 + CS$$

Tale equazione è detta *equazione di stato* della rete: ci permette di calcolare lo stato (la marcatura) successivo di una rete nota la marcatura precedente e l'evento (lo scatto di una transizione) avvenuto.

Equazione di stato

4 Tipi di Reti di Petri

In base al significato assegnato ai nodi del grafo bipartito che rappresenta la rete, possiamo distinguere tipi di Reti di Petri differenti, il cui comportamento e deve essere interpretato evidenziando alcune importanti differenze:

Reti condizioni/eventi In queste reti gli elementi di S rappresentano condizioni, mentre i vertici di T rappresentano degli eventi; in pratica con questo tipo di reti vengono rappresentati sistemi e processi in cui gli eventi si realizzano solo quando tutte le condizioni che li precedono direttamente sono soddisfatte; la realizzazione di un evento porta a soddisfare delle condizioni successive alla realizzazione di tale evento ed in questo modo la "dinamica" della rete procede nella sua iterazione.

Reti posti/transizioni Rispetto alle reti condizioni/eventi le reti posti/transizioni ammettono la presenza di più di un token nei posti ed anche il numero di token che transitano sugli archi della rete sono stabiliti sulla base di una capacità non negativa assegnata agli archi stessi.

Reti temporizzate e stocastiche In questo tipo di reti entra in gioco anche una variabile tempo nel determinare le condizioni con cui si può realizzare una determinata transizione nella dinamica descritta dalla rete. Se la variabile tempo è lagata ad una distribuzione di probabilità si parla allora di reti stocastiche.

Macchina a stati finiti e grafi marcati Una *macchina a stati finiti* è un caso particolare di una Rete di Petri posti/transizioni $G = (S, T; E)$ in cui ogni transizione ha un solo arco entrante ed un solo arco uscente: $\forall t \in T$ risulta $\bullet t = t\bullet = 1$. Viceversa i posti $s \in S$ possono avere più archi entranti e più archi uscenti.

Un *grafo marcato* $G = (S, T; E)$ è il duale di una macchina a stati: $\forall s \in S$ risulta $\bullet s = s\bullet = 1$, mentre le transizioni $t \in T$ possono avere più archi entranti ed uscenti.

4.1 Reti condizioni/eventi

Sia $G = (S, T; E)$ una Rete di Petri condizioni/eventi, i vertici di S sono chiamati *condizioni*, mentre i vertici di T sono detti *eventi*; un sottoinsieme $C \subseteq S$ è un *caso*. Diremo che l'evento $t \in T$ è *abilitato* dal caso C (è C-abilitato) se e solo se $\bullet t \subseteq C$ e $t \bullet \cap C = \emptyset$ (se tutte le sue precondizioni sono soddisfatte dal caso C e se tale caso non contiene alcuna postcondizione di t, cioè le postcondizioni di t non contengono alcun token).

Se t è abilitato da C e $C' = (C - \bullet t) \cup t\bullet$, allora il caso C' segue il caso C dopo che si è verificato l'evento t; questo si scrive con la seguente notazione: $C[t\rangle C'$.

Nella rappresentazione dello stato di una rete condizioni/eventi ogni condizione può contenere al più un token, il che indica che tale condizione è soddisfatta.

Un insieme di eventi distinti di G è un insieme *isolato* se ogni coppia di eventi non ha in comune nessuna precondizione e nessuna postcondizione.

4.2 Reti posti/transizioni

Sia $G = (S, T; E)$ una Rete di Petri posti/transizioni; i vertici di S sono chiamati *posti*, mentre i vertici di T sono detti *transizioni*. Anche in questo tipo di reti uno stato è rappresentato da una assegnazione di un certo numero di token ai posti; tuttavia, a differenza delle reti condizioni/eventi, in questo tipo di reti un posto ha una certa capacità e può dunque contenere anche più di un token. Inoltre possiamo assegnare una capacità, un peso intero non negativo, agli archi della rete; in tal caso ad ogni passo della "dinamica" della rete, lungo un arco passano non uno, ma un numero di token pari alla capacità dell'arco. Dunque cambia il meccanismo che determina la transizione: affinché abbia luogo una certa transizione, devono esserci abbastanza token nei posti di $\bullet t$ per saturare la capacità degli archi entranti in t; al tempo stesso i posti in $t\bullet$ devono avere la capacità sufficiente ad accogliere tali token.

Non dobbiamo pensare alla rete come ad un percorso all'interno del quale i token si muovono: i token indicano soltanto se una determinata transizione è abilitata ad avvenire, oppure no. Non c'è alcuna relazione fra il numero dei token che "entrano" in una determinata transizione ed il numero dei token che ne escono. In figura 2 è rappresentata una transizione che dovrebbe aiutare a chiarire questo aspetto: la transizione è abilitata percheé tutti i posti che la precedono (le sue precondizioni) contengono un numero di token tale da saturare la capacità degli archi che li collegano alla transizione (i token sono 5 e la capacità degli archi è 4); nel momento in cui la transizione "scatta", nel posto successivo alla transizione vengono aggiunti un numero di token pari alla capacità dell'arco (e non pari al numero di token "entranti" nella transizione).

In una rete posti/transizioni un *sifone* è un insieme di posti S tali che $\bullet S \subseteq S\bullet$. Una *trappola* è al contrario un insieme di posti S tale che $S\bullet \subseteq \bullet S$.

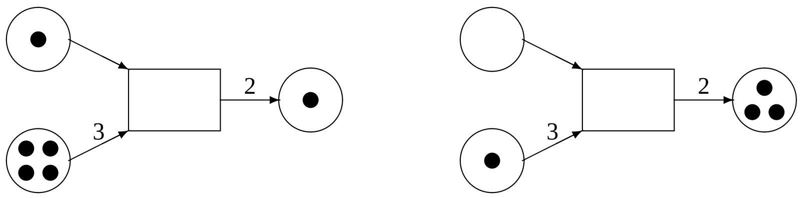

Figura 2: Stato di una rete posti/transizioni prima e dopo la transizione

4.3 Reti di Petri temporizzate e stocastiche

Se si intende utilizzare le Reti di Petri per studiare le performance di un sistema allora è necessario includere nel modello anche il concetto di tempo. Per far questo viene assegnato un parametro temporale alle transizioni secondo due modalità differenti:

- la transizione rappresenta un evento istantaneo; la temporizzazione consiste nell'associare un intervallo di tempo (t_0, t_1) alla transizione indicando in questo modo che l'evento deve avvenire non prima del tempo t_0 dall'abilitazione dell'evento stesso e non più tardi del tempo t_1;
- la transizione è un evento non istantaneo, che quindi richiede un certo tempo per avvenire; i gettoni vengono rimossi dai posti delle precondizioni nel momento in cui la transizione risulta abilitata e vengono collocati nelle postcondizioni solo allo scadere del tempo richiesto dalla transizione per essere completata.

In questi casi si parla di Reti di Petri *temporizzate*. Se il ritardo nella abilitazione di un determinata transizione o la durata della transizione stessa dipendono da una distribuzione di probabilità, si parla invece di Reti di Petri *stocastiche*.