Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica di

Barbara Burchielli

Studio del comportamento di grafi sotto l'applicazione iterata dell'operatore clique

Relatore

Prof. Marco Liverani

Anno Accademico 2003-2004

Ottobre 2004

Classificazione AMS: 05C, 68R, 68W.

Parole Chiave: teoria dei grafi, clique, decomposizione modulare, algoritmi.

Premessa

L'obiettivo della tesi è quello di proporre una panoramica sulle proprietà emerse negli ultimi anni a proposito dell'applicazione reiterata dell'operatore *clique* su un grafo.

Dal punto di vista applicativo il problema affrontato ha una notevole rilevanza nella " analisi di gruppi". Individuare le clique di un grafo con cui sono rappresentate le relazioni, o le connessioni, tra soggetti o individui, permette di evidenziare i sottogruppi in cui tali rapporti di relazione e connessione sono particolarmente stretti e caratterizzati da una forte reciprocità. Ragionare sulle relazioni che intercorrono fra tali gruppi, individuando delle sovrastrutture di relazione, via via sempre meno forti è ciò che indirettamente suggerisce lo studio del comportamento di un grafo sottoposto all'applicazione dell'operatore K-iterato. Il compito non è banale, data la vastità dell'universo dei grafi e considerato anche che il problema *Clique* è un ben noto problema *NP-completo.*

La tesi è suddivisa in tre capitoli più un'appendice in cui sono stati riportati i programmi in linguaggio C che implementano gli algoritmi analizzati nelle pagine della tesi e che rappresentano il punto di arrivo della parte applicativa del lavoro.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto alcune definizioni e proprietà fondamentali dei grafi. In particolare abbiamo definito alcune operazioni binarie sui grafi, il concetto di modulo e di decomposizione modulare, che abbiamo poi ripreso nello studio di determinate classi di grafi.

Nel secondo capitolo, dopo aver definito i grafi clique come una particolare classe di grafi intersezione, abbiamo definito l'operatore clique iterato K^n. Abbiamo anche introdotto una proprietà fondamentale nello studio della convergenza: la proprietà Helly

Nel terzo capitolo, dopo aver introdotto un esempio di grafo K-divergente, abbiamo affrontato lo studio del comportamento della classe dei grafi seriali. Abbiamo infine introdotto la classe dei cografi, che è un sottoinsieme della classe dei grafi seriali, caratterizzandone completamente il comportamento sotto l'applicazione iterata dell'operatore clique.

Grafo clique e operatore clique iterato

Un *grafo* è una coppia $G = (V, E)$, dove V è un insieme non vuoto ed E è un insieme costituito da coppie di elementi di V. Gli elementi di V si dicono *vertici* del grafo, mentre gli elementi di E vengono definiti *spigoli* del grafo.

Un grafo $G' = (V', E')$ è detto *sottografo* di $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V, E' \subseteq E$. Diremo, invece, che $G' = (V', E')$ è un *sottografo indotto* da V' in G, e lo indicheremo con la notazione $G' = G[V']$, se $V' \subseteq V$ e per ogni coppia di vertici $u, v \in V'$ risulta $(u, v) \in E' \Leftrightarrow (u, v) \in E$.

Diremo che G è un grafo *completo* se ogni coppia di vertici $u, v \in V(G)$ $(u \neq v)$, risulta $(u, v) \in E(G)$.

Una *clique* Q di un grafo G è un suo *sottografo completo massimale.* La sua caratteristica è data dal fatto che preso comunque un vertice del grafo G esterno alla clique Q e aggiunto all'insieme dei suoi vertici $V(Q)$, il sottografo $G[V(Q)]$ indotto in G dai vertici $V(Q)$ non risulta più essere completo.

Dato un grafo $G = (V, E)$, possiamo definire il suo *grafo complementare* $\overline{G} = (V_1, E_1)$ ponendo $V_1 = V$ e $E_1 = V \times V - E$.

Un *grafo clique* di $G = (V, E)$ è il grafo $K(G)$, ottenuto come intersezione delle clique di G. Il grafo clique $K(G)$ ha come vertici le clique di G; due vertici sono adiacenti in $K(G)$ se e solo se le due clique corrispondenti in G hanno intersezione non vuota, cioè se hanno almeno un vertice in comune.

In questo modo abbiamo definito un operatore $K : G \mapsto K(G)$ che chiameremo *operatore clique* che applicato ad un grafo restituisce il grafo $K(G)$ intersezione delle clique di G. Viene naturale domandarsi cosa accade se si applica iterativamente l'operatore clique K ad un grafo specifico.

Definizione 1 (Grafo clique iterato) *Il* grafo clique iterato $K^n(G)$ *è definito per ricorrenza nel modo seguente:*

$$K^n(G) = \begin{cases} G & \textit{se } n = 0 \\ K(K^{n-1}(G)) & \textit{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Abbiamo studiato il comportamento di diverse categorie di grafi cui venga applicato l'operatore K iterato: studiare il comportamento di $K^n(G)$ significa verificare come varia il numero di vertici del grafo (la cardinalità di $V(K^n(G))$) al crescere di n. In generale i grafi possono essere K-convergenti o K-divergenti. Diremo che un grafo G è K*-divergente* se la cardinalità dell'insieme dei vertici del grafo clique iterato tende all'infinito al crescere di n:

$$\lim_{n \to \infty} |V(K^n(G))| = \infty.$$

Diremo, invece, che un grafo G è K*-convergente* se la cardinalità dell'insieme dei vertici del grafo clique iterato si stabilizza. In particolare diremo che un grafo G è K*-nullo* se converge ad un grafo con un unico vertice, mentre parleremo di grafo K*-periodico* se esiste un intero positivo $n > 0$ tale che $K^n(G) \cong G$. Il più piccolo intero n per cui è verificata tale relazione è detto *periodo* del grafo G. Nel caso in cui $n = 1$ e il grafo G è connesso, si dice che G è un grafo *self-clique*, ossia $K(G) \cong G$.

La proprietà Helly

È di fondamentale importanza, nello studio del K-comportamento di grafi, la proprietà Helly. I grafi che soddisfano tale proprietà sono detti grafi clique-Helly, o semplicemente Helly. L'importanza di questa proprietà sta nel fatto che la maggior parte dei risultati sulla convergenza dei grafi clique-iterati riguardano proprio grafi clique-Helly. In generale, molto poco si conosce sul comportamento dei grafi sottoposti all'applicazione dell'operatore K-iterato quando i grafi considerati non sono grafi clique-Helly.

Diremo che una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di un insieme non vuoto X ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$) soddisfa la *proprietà Helly* se per ogni $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{F}$ tale che $S_i \cap S_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, risulta $\cap_{i=1}^{k} S_i = \emptyset$, ossia se gli elementi di S si intersecano a coppie, allora esiste un elemento comune a tutti i membri si S. Notiamo che S è un sottoinsieme della famiglia $\mathcal{F}$ ed ogni sottoinsieme S deve avere un elemento comune a tutti i propri membri, ma ciò non significa necessariamente che la famiglia $\mathcal{F}$ abbia un elemento comune a tutti i suoi sottoinsiemi.

Definizione 2 (Grafo Clique-Helly) *Un grafo $G = (V, E)$ è* clique-Helly *(o semplicemente* Helly*) se la famiglia di tutte le clique di G soddisfa la proprietà Helly.*

In altre parole, G è un grafo clique-Helly se l'insieme delle clique di G ha la seguente proprietà: ogni suo sottoinsieme (ogni collezione di clique di G) costituito da clique che si intersecano a coppie, ha intersezione non vuota. In particolare, segue da questa definizione che se il grafo stesso ha un vertice universale (un vertice adiacente ad ogni altro vertice del grafo), allora è clique-Helly. Vogliamo inoltre osservare che se G è un grafo privo di sottografi indotti isomorfi a triangoli, allora G è clique-Helly, poiché ogni sua clique non banale è uno spigolo.

Se un grafo è clique-Helly, ci sono alcuni risultati che ci permettono di stabilire facilmente il comportamento del grafo sottoposto all'operatore K. Un risultato fondamentale nello studio dei grafi clique-Helly consiste nel fatto che questa classe di grafi è chiusa rispetto all'operatore K-iterato, tale caratteristica è riassunta nel seguente Teorema:

Teorema 1 ([14]) *K(CLIQUE-HELLY) =CLIQUE-HELLY.*

Siano u e v due vertici di un grafo G, diremo che v *domina* u se e solo se $N[u] \subseteq N[v]$, cioè se l'intorno del vertice u è contenuto nell'intorno del vertice v, dove l'intorno $N[u]$ di u è l'insieme di tutti i vertici adiacenti a u, compreso il vertice stesso.

Il concetto di *dominanza* tra vertici è molto importante per lo studio del comportamento di grafi sotto l'applicazione iterata dell'operatore K. Infatti, non solo valgono i seguenti risultati che ci permettono di mettere in relazione la dominazione con la convergenza, in particolare la periodicità del grafo considerato, ma tale concetto verrà ripreso successivamente per studiare la convergenza di grafi con l'introduzione di un'altra operazione ad esso strettamente legata, lo *smantellamento*.

Teorema 2 *Sia G un grafo clique-Helly e sia H un sottografo di G di cardinalità minima tale che preso comunque un vertice $u \in G$, esiste un vertice $v \in H$ tale che v domina u in G. Allora si ha $K^2(G) \cong H$. In particolare tutti i grafi clique-Helly sono clique-convergenti di periodo* 1 *o* 2.

Una delle ragioni per cui i grafi clique-Helly rivestono una notevole importanza nella teoria dei grafi clique è il precedente risultato dovuto ad Escalante ([9]). In particolare tale risultato implica che i grafi clique-Helly periodici si possono riconoscere utilizzando la seguente semplice osservazione: se G è un grafo clique-Helly, allora esso è periodico se e solo se $N[u]$ non è contenuto in $N[v]$ presi comunque due vertici distinti $u, v \in V(G)$, in altre parole se e solo se il grafo è privo di vertici dominati. Abbiamo, quindi, la seguente caratterizzazione:

Teorema 3 ([9]) *Sia G un grafo clique-Helly. Allora le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:*

1. *G è K-periodico;*
2. *$K^2(G) \cong G$;*
3. *G non ha vertici dominati;*
4. *$\nu(v) = v^*$ definisce un isomorfismo $\nu : G \to K^2(G)$.*

Una condizione sufficiente affinchè un grafo sia self–clique è la seguente, dovuta a Bondy, Durán, Min Chin Lin, Szwarcfiter [3]. Sia G un grafo connesso e finito. Indichiamo con $g(G)$ la circonferenza di G, ossia la lunghezza del più piccolo ciclo in G, se esiste. Definiamo *potenza k-esima* del grafo G il grafo G^k che ha come vertici i vertici del grafo stesso ed inoltre diremo che due vertici in G^k sono adiacenti se la loro distanza in G è al più k. Vale, allora, il seguente risultato.

Teorema 4 *Sia G un grafo. Se $\delta(G) \geq 2$ e $g(G) \geq 6k+1$, $k \geq 1$, allora G^{2k} è un grafo self-clique, ossia $K(G^{2k}) \cong G^{2k}$.*

Se i grafi considerati non soddisfano la proprietà Helly, non si conosce molto sul loro K-comportamento. È quindi di fondamentale importanza avere una caratterizzazione costruttiva tramite la quale poter riconoscere quando un grafo è clique-Helly.

Prima di proporre un teorema che ci fornisce una caratterizzazione per determinare se un grafo appartiene o meno alla classe dei grafi clique-Helly, dobbiamo introdurre alcune definizioni.

Sia G un grafo e sia T un suo triangolo. Un *triangolo esteso* di G relativo a T, è il sottografo $\hat{T}$ di G indotto dai vertici che formano un triangolo con almeno uno spigolo di T; notiamo che si avrà sempre almeno $\hat{T} = T$. Ricordiamo, inoltre, che un vertice v di $V(G)$ si dice *universale* in G se esso è adiacente ad ogni altro vertice di G.

Teorema 5 *Un grafo G è clique-Helly se e solo se ogni suo triangolo esteso contiene un vertice universale.*

Questo teorema ci permette di costruire un algoritmo di riconoscimento dei grafi clique-Helly di complessità polinomiale, implementato in linguaggio C nel corso del lavoro di tesi.

Alcuni risultati di convergenza e di divergenza

Vogliamo, ora, descrivere il comportamento di alcune particolari classi di grafi cui sia applicato iterativamente l'operatore clique.

Iniziamo introducendo il primo esempio di grafo K-divergente, l'ottaedro n-dimensionale $\mathcal{O}_n$, dovuto a Neumann-Lara. Tale grafo riveste una notevole importanza nello studio della K-divergenza. Infatti è possibile, in alcuni casi tramite operazioni che verranno in seguito introdotte (retrazione e smantellamento), riportare lo studio del comportamento di altre classi di grafi al K-comportamento dell'ottaedro $\mathcal{O}_n$ e di conseguenza, è possibile concludere che tali classi, sotto opprtune ipotesi, sono K-divergenti.

Dato un grafo $G = (V, E)$, un *matching* M su G è un insieme di spigoli del grafo tale che non esistono due archi in M incidenti sullo stesso vertice $v \in V$, ossia non esistono due spigoli in M che hanno un vertice in comune. Il più grande matching possibile su un grafo di $2n$ vertici è costituito da n spigoli. Tale matching viene definito *perfect matching*.

Per $n \geq 2$, definiamo l'ottaedro n-dimensionale $\mathcal{O}_n$ come il complementare di un perfect matching su $2n$ vertici. L'ottaedro $\mathcal{O}_n$ così definito è un grafo completo multipartito $K_{\underbrace{2,\ldots,2}_{n}}$.

Neumann-Lara ha mostrato che $K(\mathcal{O}_n) \cong \mathcal{O}_{2^{n-1}}$ e quindi, per $n \geq 3$, l'ottaedro n-dimensionale $\mathcal{O}_n$ è K-divergente in modo superesponenziale.

Diremo che H è un retratto di G se esitono due morfismi tra grafi (applicazioni che mandano vertici adiacenti in vertici adiacenti o uguali), $\alpha : H \to G$ e $\beta : G \to H$ tali che $\beta \circ \alpha : H \to H$ coincide con l'identità sul grafo.

Teorema 6 (Teorema di retrazione) *Siano G, H due grafi tali che il grafo H è un retratto di G. Allora, $K(H)$ è un retratto di $K(G)$ ed inoltre, se il grafo H è K-divergente, allora anche il grafo G è K-divergente.*

In particolare, Neumann-Lara ha mostrato che tutti i grafi completi multipartiti $K_{p_1,\dots,p_n}$ con $n \geq 3, p_i \geq 2$ $(i = 1, \dots, n)$, sono K-divergenti in modo superesponenziale. Infatti è possibile determinare una retrazione da un grafo multipartito completo $K_{r_1,\dots,r_n}$ all'ottaedro n-dimensionale $\mathcal{O}_n$, per $r_1, \dots, r_n \geq 2$ e $n \geq 3$ e poiché sappiamo che $\mathcal{O}_n$ è K-divergente, il Teorema 6 implica che anche il grafo $K_{r_1,\dots,r_n}$ è K-divergente.

Ioltre è possibile mostrare che se H è un retratto di G, allora hanno lo stesso K-comportamento, ossia sono entrambi convergenti o divergenti. Per dimostrare questo risultato iniziamo dando alcune definizioni. Un *modulo* di un grafo non orientato G è un insieme di vertici $M \subseteq V(G)$, non vuoto, tale che ogni vertice di M sia adiacente agli stessi vertici non appartenenti a M. In altre parole, considerato un qualsiasi vertice $v \in V(G) - M$, v è adiacente ad ogni vertice di M oppure non è adiacente a nessun vertice di M. Diremo, inoltre, che M è un *modulo strong* se, preso comunque un modulo A di G, si ha $A \cap M \in \{\emptyset, M, A\}$. Osserviamo che i vertici di M non devono necessariamente essere adiacenti tra loro.

Dati due grafi G e H, diremo che G è *smantellabile* in H se esiste una successione di grafi $G_0, \dots, G_r$ tale che $G = G_0$, $H \cong G_r$ e $G_{1+1} = G_1 - \{x_i\}$ dove x_i è un vertice dominato del grafo G_i. Se il grafo G è smantellabile nel grafo H, per come è costruito, in particolare risulta che il grafo H è un retratto del grafo G. Una classe speciale di smantellamento che gioca un ruolo chiave nello studio del K-comportamento dei grafi, è la seguente.

Definizione 3 *Siano G e H due grafi. Diremo che $G \overset{\#}{\to} H$ se il grafo H è isomorfo ad un sottografo indotto H_0 del grafo G tale che ogni vertice u in G è dominato da un vertice v in H_0, con v non necessariamente diverso da u.*

È semplice verificare che $G \overset{\#}{\to} H$ implica che il grafo G è smantellabile nel grafo H. Inoltre, il grafo G è smantellabile in H se e solo se esiste una sequenza di grafi che soddisfi le relazioni $G \overset{\#}{\to} G_0 \overset{\#}{\to} G_1 \overset{\#}{\to} \cdots \overset{\#}{\to} G_r = H$.

Abbiamo, quindi il seguente teorema che mette in relazione il comportamento del grafo G con il grafo H, ottenuto per smantellamento da G, in particolare fornisce una relazione tra G e il grafo $G - \{x\}$.

Teorema 7 *Se G è smantellabile in H, allora G e H hanno lo stesso K-comportamento. In particolare, se x è un vertice dominato di G, allora G e $G - \{x\}$ hanno lo stesso K-comportamento.*

Grafi seriali

Abbiamo studiato il K-comportamento dei grafi seriali utilizzando il concetto di decomposizione modulare, che ci permette di spezzare il problema in sottoproblemi più semplici. In particolare abbiamo analizzato i grafi seriali i cui moduli sono parallelamente decomponibili e nello specifico abbiamo affrontato lo studio del comportamento dei cografi che sono una particolare classe di grafi seriali parallelamente decomponibili, per i quali si è riusciti a caratterizzarne completamente il K-comportamento.

Dato un grafo non vuoto G, la famiglia di tutti i moduli strong massimali $\{M_1, M_2, \ldots, M_p\}$, con $p \geq 2$, è una partizione dell'insieme dei vertici $V(G)$ e viene definita *decomposizione modulare del grafo G.*

Se un modulo M di un grafo G contiene vertici di due distinte componenti connesse di G, allora contiene entrambe le componenti connesse. Questa particolare caratteristica dei moduli, ci suggerisce un modo per poterli determinare.

Siano H e H' due grafi disgiunti. L'*unione*, o *composizione parallela*, di H e H' è il grafo $G = H \cup H'$, definito nel modo seguente: $V(G) = V(H) \cup V(H')$ e $E(G) = E(H) \cup E(H')$.

La *somma*, o *composizione seriale*, di H e H' è il grafo $G = H + H'$, definito nel modo seguente: $V(G) = V(H) \cup V(H')$ e $E(G) = E(H) \cup E(H') \cup \{\{u, v\} \text{ tali che } u \in V(H), v \in V(H')\}$.

Nel caso in cui il grafo G sia non connesso, può essere decomposto nelle sue componenti connesse (decomposizione parallela) e si ha $G = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$. Il grafo G si dice grafo *parallelo* ed ogni modulo M_i è una componente connessa del grafo stesso.

Nel caso in cui, invece, il grafo G sia connesso e il suo grafo complementare $\overline{G}$ sia non connesso, il grafo G può essere decomposto nelle componenti connesse del grafo complementare $\overline{G}$ (decomposizione seriale) e si ha $G = M_1 + M_2 + \ldots + M_p$. Il grafo G si dice grafo *seriale* ed ogni modulo M_i è una componente connessa del grafo complementare $\overline{G}$.

Analogamente a quanto detto per il grafo G, avremo che un modulo M si dice *parallelo* se il sottografo indotto da M in G è non connesso; M si dice *seriale* se il complementare del sottografo indotto da M in G è non connesso ed infine M si dice di tipo *neighbourhood* se entrambi i sottografi indotti sono connessi.

Applicando iterativamente la decomposizione modulare appena descritta ad un grafo non vuoto G possiamo calcolare l'*albero di decomposizione modulare* $T(G)$.

La radice dell'albero $T(G)$ rappresenta il grafo stesso, il primo livello di nodi dell'albero rappresenta i moduli strong massimali del grafo G, il secondo livello rappresenta la decomposizione modulare dei singoli moduli del livello precedente e così via. Le foglie dell'albero rappresentano i vertici del grafo e i nodi interni sono i moduli etichettati con le lettere P, S o N (moduli paralleli, seriali o neighbourhood).

La decomposizione modulare di un grafo riveste una notevole importanza nello studio del suo K–comportamento. Se il grafo G è non connesso ed è tale che $G = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_p$, con $p \geq 2$, per il grafo clique si avrà, $K(G) = K(H_1) \cup K(H_2) \cup \cdots \cup K(H_p)$ e quindi non è limitativo studiare il K-comportamento della sola classe dei grafi connessi. Di conseguenza ci limiteremo a trattare, per ora, solo grafi seriali, avendo ulteriormente supposto che il grafo G non sia di tipo neighbourhood o che non contenga moduli di questo tipo: in altri temini ci limiteremo a studiare grafi seriali per i quali G e $\overline{G}$ non sono entrambi connessi.

Dalla definizione segue che un grafo G è seriale se e solo se il suo complementare è non connesso. Vogliamo dare una caratterizzazione dei grafi seriali che siano clique-Helly e descrivere il loro K-comportamento.

Notiamo che se G ha un vertice universale (ossia G è un cono), tutte le sue clique lo contengono e quindi, dalla definizione di grafo clique-Helly, segue che G è clique-Helly. Inoltre, in tal caso, $K(G)$ è un grafo completo e di conseguenza $K^2(G)$ coincide con un solo vertice. Possiamo perciò concludere che tutti i coni sono K-nulli.

Teorema 8 *Sia $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_p$ una decomposizione modulare di un grafo seriale. Allora G è clique-Helly se e solo se è soddisfatta una delle due seguenti condizioni:*

1. *G è un cono;*

2. *$p = 2$ e tutte le componenti connesse di G_1 e G_2 sono coni.*

Consideriamo la decomposizione modulare

$$G = M_1 + M_2 + \ldots + M_p$$

di un grafo seriale. Se qualche M_i è *banale* (ossia composto da un solo vertice), allora G è un cono che sappiamo essere K-nullo. Supponiamo, perciò, che non esistano moduli seriali M_i banali. Se, inoltre, assumiamo che non possono essere di tipo neighbourhood, allora devono necessariamente essere di tipo parallelo: ogni modulo seriale M_i ha la forma

$$M_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} M_j^i, \text{ con } p_i \geq 2.$$

Diremo, in questo caso, che G è un grafo *seriale parallelamente decomponibile.* Poiché un modulo di un modulo di G è ancora un modulo di G, allora tutti i grafi M_j^i sono moduli seriali e quindi sono moduli connessi di G.

I grafi seriali parallelamente decomponibili con almeno tre moduli strong massimali sono sempre divergenti, come afferma il seguente teorema.

Teorema 9 *Sia G un grafo seriale parallelamente decomponibile. Se $p \geq 3$, allora G è K-divergente.*

Abbiamo quindi dimostrato che per $p \geq 3$ i grafi seriali parallelamente decomponibili G sono divergenti; ci rimane quindi da studiare il loro K-comportamento nel caso p=2.

Sappiamo, dal Teorema 8, che se G è un cono o se tutti i suoi moduli G_j^i sono coni, il grafo G è K-convergente. Esistono anche grafi seriali parallelamente decomponibili nel caso $p = 2$ che risultano essere grafi K-divergenti:

Teorema 10 *Sia $G = M_1 + M_2$ un grafo seriale. Se esiste almeno un modulo M_j^i che sia un grafo seriale parallelamente decomponibile, allora G è K-divergente.*

In conclusione, il K-comportamento di grafi G seriali che non siano clique-Helly rimane sconosciuto se G non è scomponibile parallelamente o se lo è ma p=2 e M_j^i non sia un grafo scomponibile parallelamente.

Una particolare classe di grafi seriali parallelamente decomponibili sono i *cografi*. Un cografo è un grafo privo di sottografi indotti isomorfi a P_4 (cammino di lunghezza 3); è possibile provare che i cografi sono caratterizzati anche per il fatto che sono grafi aventi un unico albero di rappresentazione (albero di decomposizione modulare), detto *co-albero*.

Nell'albero di decomposizione modulare T di un cografo G le foglie rappresentano i vertici del grafo. I nodi interni al coalbero, invece, sono etichettati con "$\cup$" o "$+$" in modo tale che i nodi *unione* "$\cup$" e i nodi *somma* "$+$" siano alternati lungo ogni cammino (path) che parte dalla radice R dell'albero T, che è sempre etichettata con un nodo somma "$+$", e giunge alle foglie di T. La radice R avrà un solo nodo figlio "$\cup$", se e solo se rappresenta un cografo non connesso. Due vertici u e v sono adiacenti nel cografo G se e solo se l'unico cammino da u alla radice R del coalbero di rappresentazione del cografo G, incontra l'unico cammino dal vertice v alla radice R in un nodo somma "$+$". Abbiamo studiato, nel nostro lavoro, un algoritmo di complessità lineare per determinare la decomposizione modulare di un cografo. Ciò è molto utile, in quanto se G è un cografo il suo K-comportamento è ben definito, nel senso che è completamente caratterizato.

Il seguente risultato descrive il K-comportamento dei cografi. Osserviamo che un cografo che non sia un cono è un grafo seriale parallelamente decomponibile, ossia se G non è un cono possiamo sempre decomporlo nella forma $G = M_1 + \ldots + M_p$, dove ogni modulo M_i è del tipo $M_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} M_j^{(i)}$.

Teorema 11 *Un cografo G è K-divergente se e solo se entrambe le seguenti condizioni sono verificate:*

1. *G non è un cono;*

2. *$p \geq 3$, o $p = 2$ e almeno un modulo G_j^i non è un cono.*

Questo teorema implica che il K-comportamento di un cografo G, può essere deciso in tempo polinomiale. Infatti, il co-albero del cografo G può essere ottenuto in un tempo lineare e le condizioni del teorema possono anch'esse essere verificate in tempo lineare. Un importante risultato è il seguente che caratterizza completamente il K-comportamento dei cografi.

Teorema 12 *Un cografo G è K-convergente se e solo se è G clique-Helly.*

Si capisce, quindi, l'importanza di avere a disposizione un algoritmo che ci permetta di determinare se un grafo G è un cografo; d'altra parte è anche molto utile, per quanto detto in precedenza e per la caratterizzazione appena data, avere un algoritmo che ci permetta, dato un grafo, di verificare se soddisfa la proprietà Helly.

Bibliografia

[1] L. Alcon, M. Gutierrez, *A new characterization of clique-graphs*, Departamento de Matematica, Un. Nacional de La Plata, Argentina.

[2] G. Ausiello, A. Marchetti-Spaccamela, M. Protasi, *Teoria e progetto di algoritmi fondamentali*, Ed. Franco Angeli 1988.

[3] A. Bondy, G. Durán, Min Chin Lin, J. L. Szwarcfiter, *A sufficient condition for self-clique graphs*, Elsevier Science 2001 (preprint).

[4] A.Bondy, G. Durán, Min Chih Lin, J.L. Szwarcfiter, *Self-clique graphs and matrix permutations*, Journal of Graph Theory, 2003, Vol. 44 n. 3, 178–192.

[5] A. Brandstadt, Van Bang Le, J.P. Spinrad, *Graph classes*, Ed.Addison-Wesley, 2001.

[6] A. Brandstadt, Van Bang Le, J.P. Spinrad, *Graph classes: a survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.

[7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, *Introduzione agli algoritmi*, volume 2, Jackson Libri, 1999.

[8] D.G.Corneil, Y.Perl, L.K.Stewart, *A linear recognition algorithm for cographs*, SIAM J. COMPUT., Vol. 14 (Novembre 1985), 926-934.

[9] F.Escalante, *Uber iterierte clique-graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (1973), 58-68.

[10] F. Larrión, V. Neumann-Lara, M. A. Pizaña, T. D. Porter, *A Hierarchy of Self-Clique Graphs*, Discrete Mathematics 2004, Vol. 282, n. 1-3, 193-208.

[11] A. Morgana, V. Neumann-Lara, M.A. Pizaña, F.Larrión, C.P.de Mello, *The clique operator on cographs and serial graphs*, Discrete Mathematics 2004, Vol. 282, n. 1-3, 183-191.

[12] M. A. Pizaña, M. E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, *Dismantlings and iterated clique graphs*, Discrete Mathematics 2004, Vol. 282, n. 1-3, 263-265.

[13] F. Protti, J.L. Szwarcfiter, *Clique-inverse graphs of K_3-free and K_4-free graphs*, Journal of graph theory 1999.

[14] J.L.Szwarcfiter, *A survey on clique graphs*, estratti da *Brazilian Summer School on Combinatorics and Algorithms*, 12-16 Marzo 2001.

[15] J.L.Szwarcfiter, *Recognizing clique-Helly graphs*, Ars Combinatoria 45(1997), 29-32.

[16] D.R. Wood, *Characterisations of intersection Graphs by vertex orderings*, August 2004.