UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di

Letizia Monaldi

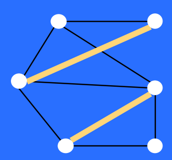
MATCHING SU GRAFI E ALCUNE VARIANTI DEL PROBLEMA DEL MARIMONIO STABILE

Relatore
Prof. Marco Liverani

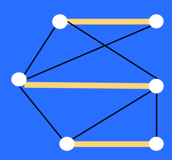
MATCHING SU GRAFI

Sia $G = (V, E)$ un grafo (V insieme dei vertici, E insieme degli spigoli)

Matching
$M \subseteq E$ contenente archi non aventi estremi comuni

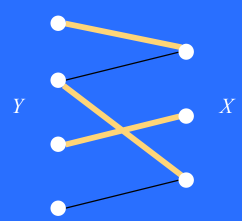


Matching perfetto
matching M tale che $\forall\ v \in V\ \exists\ e \in M$ incidente in v



Sia $G = ((X,Y), E)$ un grafo bipartito

Matching completo da X a Y
matching M tale che $\forall\ v \in X\ \exists\ e \in M$ incidente in v



2

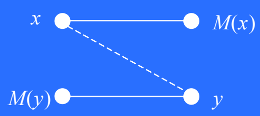
STABLE MARRIAGE PROBLEM

- X, Y: $|X| = |Y| = n$
- $\forall\, x \in X \quad N(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \; y_i >_x y_j$ se $i < j$
- $\forall\, y \in Y \quad N(y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \; x_i >_y x_j$ se $i < j$

Stabilità

Se $\exists\, (x, y) \notin M$ tale che

$$x >_y M(y) \;\text{ e }\; y >_x M(x)$$



allora M è INSTABILE e (x, y) è una coppia BLOCCO per M

M è STABILE se non esistono coppie blocco per M

Stable marriage problem

Dato G bipartito, con $V = X \cup Y$, $|X|=|Y|$, trovare un matching stabile

3

STABLE MARRIAGE PROBLEM (Algoritmo GS)

Teorema del "Matrimonio Stabile" (Gale-Shapley, 1962)

Per ogni istanza del problema del matrimonio stabile esiste un matching stabile (dimostrazione *costruttiva* in cui viene esibito un algoritmo)

Algoritmo GS

1. $\forall\, x \in X$ si assegna $M(x) \leftarrow y_1$
2. $\forall\, y \in Y$: $\exists\, k \leq n \;\; M(x_{i_1}) = y, \ldots, M(x_{i_k}) = y$

   $\Rightarrow M(y) \leftarrow x_m$, $m = \min(i_1, \ldots, i_k)$

   e $\forall\, x = x_{i_j}$ tale che $i_j \neq m$

   $\Rightarrow M(x) \leftarrow x$
3. $\forall\, x \in X : M(x) = x \;\Rightarrow \mathrm{M}(x) \leftarrow y_2$

I passi si ripetono e la procedura termina quando $M(y) \neq y \;\forall\, y \in Y$

4

STABLE MARRIAGE PROBLEM (Altri algoritmi)

Altri algoritmi per lo stesso problema:

1962 - Gale e Shapley, Algoritmo GS: $O(n^2)$

1976 - Knuth, Algoritmo Fondamentale: $O(n^2)$

1989 - Gusfield e Irving, Algoritmo GS Esteso: $O(n^2)$

5

VARIANTI DELLO STABLE MARRIAGE PROBLEM

- **SMCD**: Elementi da abbinare diversi in numero
  $|X| \neq |Y|$

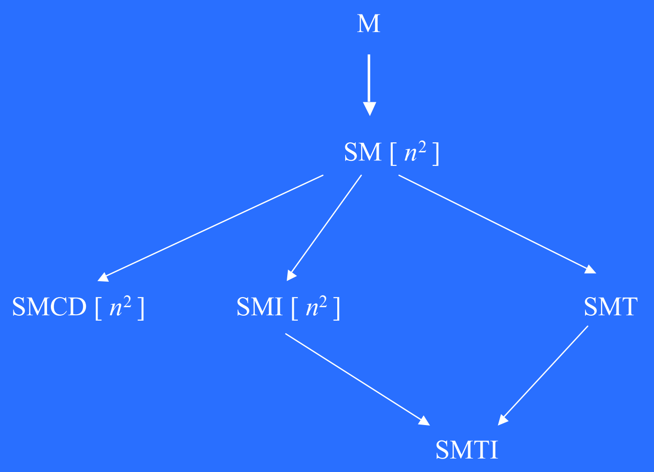
- **SMI**: Liste di preferenza incomplete
  $|X| = |Y| = n,$
  $\exists\ v \in X \cap Y : |N(v)| < n;$

- **SMT**: Liste di preferenza non strettamente ordinate
  $|X| = |Y| = n,$
  $\exists\ v \in X \cap Y : v_j = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}\},\ j \in \{1, \ldots, n\};$

- **SMTI** = SMI + SMT : Liste di preferenza incomplete e/o non strettamente ordinate

6

VARIANTI DELLO STABLE MARRIAGE PROBLEM



8

VARIANTI DELLO STABLE MARRIAGE PROBLEM (Stabilità)

SMT

- M è SUPER stabile se non esistono x e y tali che:
  $(x, y) \notin M$,
  $y \geq_x M(x)$ e $x \geq_y M(y)$

- M è FORTEMENTE stabile se non esistono x e y tali che:
  $(x, y) \notin M$,
  $y \geq_x M(x)$ e $x >_y M(y)$ o
  $y >_x M(x)$ e $x \geq_y M(y)$

- M è DEBOLMENTE stabile se non esistono x e y tali che:
  $(x, y) \notin M$,
  $y >_x M(x)$ e $x >_y M(y)$

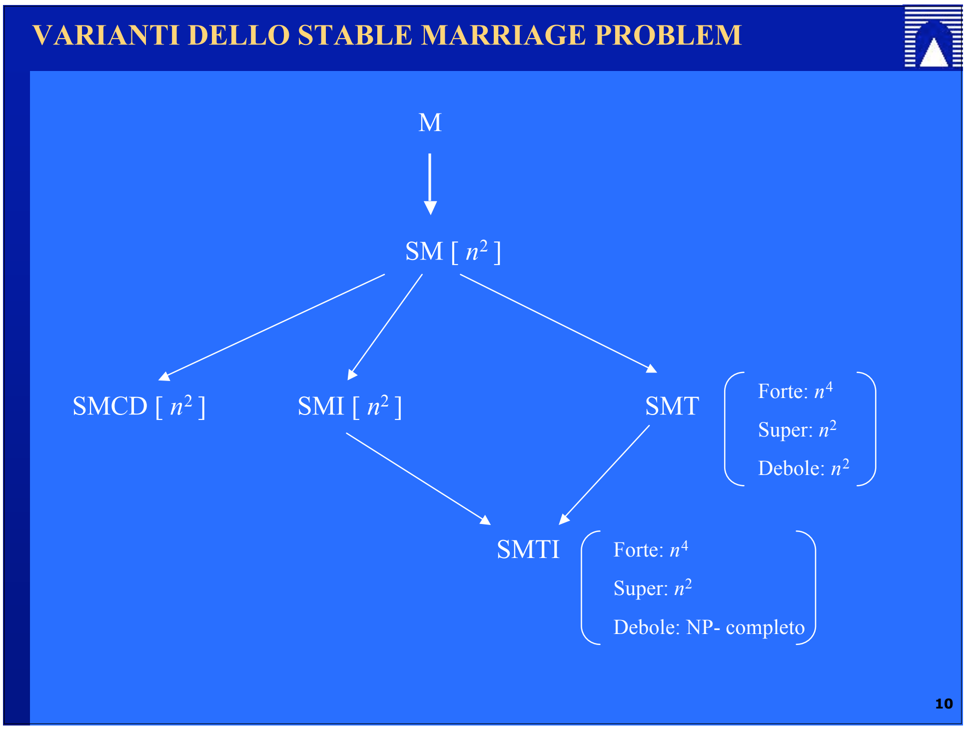
SMTI

- M è SUPER stabile se non esistono x e y compatibili tali che:
  $(x, y) \notin M$
  $y \geq_x M(x)$ o $M(x) = x$ e
  $x \geq_y M(y)$ o $M(y) = y$

- M è FORTEMENTE stabile se non esistono x e y compatibili tali che:
  $(x, y) \notin M$,
  $y \geq_x M(x)$ o $M(x) = x$
  $x >_y M(y)$ o $M(y) = y$

- M è DEBOLMENTE stabile se non esistono x e y compatibili tali che:
  $(x,y) \notin M$,
  $y >_x M(x)$ o $M(x) = x$ e
  $x >_y M(y)$ o $M(y) = y$

9


VARIANTI DELLO STABLE MARRIAGE PROBLEM
M
SM [n^2]
SMCD [n^2]
SMI [n^2]
SMT
Forte: n^4
Super: n^2
Debole: n^2
SMTI
Forte: n^4
Super: n^2
Debole: NP- completo
10