Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esonero del 16-11-98

CORREZIONE

---

(1) Scrivendo

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 - 4y = \partial H/\partial y, \\ \dot{y} = 4x^3 - 4x = -\partial H/\partial x. \end{cases}$$

si ottiene dall'integrazione (in y) della prima equazione e dall'integrazione (in x) della seconda

$$H(x,y) = y^4 - 2y^2 + f(x), \qquad H(x,y) = -x^4 + 2x^2 + g(y),$$

dove $f(x)$ e $g(y)$ sono funzioni che appaiono come costanti d'integrazione, così che

$$H(x,y) = y^4 - 2y^2 - x^4 + 2x^2 + C,$$

per qualche costante C. Si può scegliere $C = 0$ in modo tale che

$$H(x,y) = \left(y^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 - 1\right)^2 .$$

Si noti che $H(x,y)$ è pari in x e y separatamente: $H(x,y) = H(-x,y) = H(x,-y) = H(-x,-y)$.

---

(2) I punti critici devono soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4y\left(y^2 - 1\right) = 0, \\ 4x\left(x^2 - 1\right) = 0, \end{cases}$$

e sono quindi i punti

$$\begin{array}{ccc} P_1 = (0,0), & P_2 = (1,0), & P_3 = (-1,0), \\ P_4 = (0,1), & P_5 = (0,-1), & P_6 = (1,1), \\ P_7 = (1,-1), & P_8 = (-1,1), & P_9 = (-1,-1) \end{array} .$$

La matrice del sistema linearizzato (nell'intorno di un qualsiasi punto (x,y)) è data da

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 12y^2 - 4 \\ 12x^2 - 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \\ -H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \end{pmatrix},$$

dove $H_{xx}(x,y) = [\partial^2 H/\partial^2 x](x,y)$, etc.

Si vede quindi che

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

così che gli autovalori di $A(0,0)$ sono $\lambda = \pm 4$: uno di essi è reale strettamente positivo, quindi P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

Si ha inoltre

$$A(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

così che i corrispondenti autovalori sono $\lambda = \pm 8$, quindi i punti P_i, $i = 6, \ldots, 9$ sono anch'essi instabili (si noti che, stante la parità di $H(x,y)$, sarebbe sufficiente studiare uno solo dei punti, *e.g.* P_6).

Infine

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

così che, in entrambi i casi, gli autovalori sono $\lambda = \pm i 4\sqrt{2}$; quindi lo studio del sistema linearizzato non permette di trarre conclusioni sulla stabilità dei punti P_i, $i = 2, \ldots, 5$.

Consideriamo la matrice hessiana

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \\ H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2 + 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{H}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

così che $\det \mathcal{H}(\pm 1, 0) > 0$ e $H_{xx}(\pm 1, 0) = -8 < 0$; quindi i punti P_2, P_3 sono punti di massimo per $H(x,y)$. Analogamente, poiché $\det \mathcal{H}(0, \pm 1) > 0$ e $H_{xx}(0, \pm 1) = 4 > 0$, si conclude che i punti P_4, P_5 sono di minimo per $H(x,y)$.

Se allora definiamo la funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_i), \qquad i = 4, 5,$$

possiamo applicare il Teorema di Lyapunov per concludere che i punti P_4, P_5 sono punti d'equilibrio stabile. Infatti si può fissare un intorno $B(P_i)$ del punto P_i tale che

$$\begin{cases} W(P_i) = 0, \qquad W(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B(P_i) \setminus \{P_i\}, \\ \dot{W}(x,y) = 0, \end{cases}$$

e quindi le ipotesi del Teorema sono soddisfatte.

Definendo la funzione di Lyapunov come

$$W(x,y) = -\Big[H(x,y) - H(P_i) \Big], \qquad i = 2, 3,$$

si conclude allo stesso modo che P_2, P_3 sono stabili.

---

(3) Innanzitutto si ha

$$\begin{aligned} &H(P_1) = H(P_6) = H(P_7) = H(P_8) = H(P_9) = 0, \\ &H(P_2) = H(P_3) = 1, \qquad H(P_4) = H(P_5) = -1. \end{aligned}$$

Inoltre la curva di livello corrispondente al valore $H(x,y) = 0$ è facile da graficare ed è data da

$$(y^2 - 1) = \pm (x^2 - 1),$$

e quindi, limitandosi a punti del primo quadrante ($x > 0, y > 0$), per la parità di $H(x,y)$, si ha

$$y = \sqrt{1 \pm (x^2 - 1)} = \begin{cases} y_+(x) = x, \\ y_-(x) = \sqrt{2 - x^2} \end{cases},$$

dove y_+ determina una retta di pendenza 1 passante per l'origine, mentre y_- determina un quarto di circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$. L'intera curva di livello $H(x,y) = 0$ è rappresentata quindi dalle due rette $|y| = |x|$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 2$; essa contiene 17 orbite: 5 punti d'equilibrio e 12 altre orbite, lungo le quali il moto sarà asintotico.

Le due rette dividono la regione interna alla circonferenza in quattro regioni aperte A_1, A_2, A_3, A_4, contenenti, rispettivamente, i punti P_2, P_4, P_3, P_5.

Nelle regioni A_1 e A_3 la funzione H è positiva e ha nei punti d'equilibrio P_2 e P_3 dei punti di massimo (dal momento che essi sono gli unici punti stazionari per H interni alle due regioni e la funzione H assume valore zero sulla frontiera di tali regioni), come già trovato precedentemente. Analogamente nelle regioni A_2 e A_4 la funzione H è negativa e ha nei punti d'equilibrio P_4 e P_5 dei punti di minimo.

All'interno di ciascuna delle regioni A_i, $i = 1, \ldots, 4$, vi saranno traiettorie periodiche. Infatti ognuna delle quattro regioni A_i è racchiusa da (una parte connessa di) una curva di livello e contiene al suo interno un solo punto d'equilibrio stabile; poiché inoltre il sistema ammette una costante del moto che non è identicamente costante su nessun aperto, possiamo concludere che tutte le traiettorie all'interno di A_i sono periodiche.

Alternativamente si può scrivere esplicitamente y in funzione di x o viceversa e si verifica che si ottiene una curva (regolare) chiusa: la corrispondente traiettoria sarà quindi periodica.

Per esempio nella regione A_1 si avranno curve di livello per valori $c \in (0, 1)$ di H (*i.e.* per valori di H compresi tra 0 e $H(P_2) = 1$). Se si considera allora il luogo dei punti (x, y) che definisce la curva di livello $H(x, y) = c$, si vede che questa interseca l'asse $y = 0$ nei punti x tali che

$$(x^2 - 1)^2 = 1 - c > 0,$$

i.e. nei punti

$$x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - c}}.$$

Poiché siamo interessati alla componente della curva di livello contenuta in A_1, consideriamo solo le determinazioni positive della radice quadrata (esterna): troviamo quindi due intersezioni

$$x_1 = \sqrt{1 - \sqrt{1 - c}}, \qquad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - c}}.$$

La componente della curva di livello $H = c$ interna ad A_1 sarà quindi una curva passante per i punti x_1 e x_2. Poiché sui punti (x, y) lungo tale curva si ha $F(x, y) \equiv H(x, y) - c = 0$ (per definizione di curva di livello) e $\nabla F(x, y) = (-4x(x^2 - 1), 4y(y^2 - 1)) \neq (0, 0)$, allora la curva sarà una curva regolare. Inoltre essa è simmetrica per riflessione rispetto all'asse $y = 0$, quindi è una curva chiusa. Di conseguenza la traiettoria che la percorre è periodica.

Per le restanti regioni A_2, A_3 e A_4, si può procedere in modo analogo, o, più semplicemente, usare la parità di $H(x, y)$.

All'esterno della circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ si avranno orbite aperte che, per $t \to \pm\infty$, si avvicinano asintoticamente alle rette $|y| = |x|$.

Il verso di percorrenza si stabilisce guardando le equazioni che definiscono il sistema dinamico.

Si vede che $\dot{x} > 0$ per $y > 0, |y| > 1$ oppure per $y < 0, |y| < 1$. Quindi se si considera le retta passante per i punti P_6 e P_9, le traiettorie lungo tale retta vanno verso l'origine o all'infinito, allontanandosi dai punti P_6 e P_9; se si considera la retta passante per i punti P_7 e P_8, le traiettorie lungo tale retta vanno verso i punti P_7 e P_8, allontanandosi dall'origine o provenendo dall'infinito. Lungo la circonferenza le traiettorie vanno da P_7 a P_6, da P_7 a P_9, da P_8 a P_6 e da P_8 a P_9.

Nel resto del piano le direzioni delle traiettorie possono essere facilmente ricavate utilizzando la dipendenza continua dai dati iniziali e la continuità del campo vettoriale.

Ved. Figura.

(4) Le traiettorie periodiche sono state discusse al punto precedente. Possiamo individuare i dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ che generano traiettorie periodiche attraverso le condizioni

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 < 2, \qquad 0 < |H(\bar{x}, \bar{y})| < 1.$$

Poiché il dato iniziale $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = (1/\sqrt{2}, 0)$ è contenuto nella regione aperta $A_1 \setminus \{P_2\}$, la traiettoria che parte da esso sarà periodica. Poiché $H(1/\sqrt{2}, 0) = 3/4$, la traiettoria si svolgerà sulla componente connessa della curva di livello $H(x, y) = 3/4$: tale componente intersecherà l'asse $y = 0$ in un un altro punto x_1 tale che

$$H(x_1, 0) = 1 - (x_1^2 - 1)^2 = \frac{3}{4};$$

quindi $x_1 = \sqrt{3/2}$. Visti i versi di percorrenza delle orbite, possiamo concludere che ci si muove dal punto $(\bar{x}, 0)$ verso il punto $(x_1, 0)$ passando nel semipiano inferiore $(y < 0)$. Lungo tale percorso si avrà

$$H(x, y) = \left(y^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 - 1\right)^2 = \frac{3}{4},$$

e quindi (tenendo conto del segno di y e del fatto che $|y| < 1$ in A_1)

$$y = y(x) = -\sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + (x^2 - 1)^2}}.$$

Pertanto

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4y(x)\left(y^2(x) - 1\right) = -4\sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + (x^2 - 1)^2}}\left[\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4} + (x^2 - 1)^2} - 1\right)\right],$$

così che

$$T = 2\int_{\bar{x}}^{x_1} \frac{dx}{4y(x)\left(y^2(x) - 1\right)} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{3/2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + (x^2 - 1)^2}}\left(\frac{3}{4} + (x^2 - 1)^2\right)}$$

che esprime il periodo del moto con dato iniziale $(1/\sqrt{2}, 0)$ come integrale definito.

---

(5) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, allora il sistema dinamico è modificato in

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(y^2 - 1\right) - \alpha x, \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 - 1\right) - ay, \end{cases}$$

così che la matrice del sistema linearizzato corrispondente in un intorno dell'origine è data da

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -4 \\ -4 & -\alpha \end{pmatrix};$$

gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico

$$\det\left(A(0,0) - \lambda \mathbb{1}\right) = \lambda^2 + 2\lambda\alpha - 16 + \alpha^2,$$

e quindi $\lambda_\pm = -\alpha \pm 4$, così che se $\alpha \le 0$ risulta sempre $\lambda_+ > 0$, mentre, per $\alpha > 0$, si ha $\lambda_- < 0$ per ogni α (positivo) e $\lambda_+ < 0$ per ogni $\alpha > 4$. In conclusione i due autovalori saranno entrambi (strettamente) negativi per $\alpha > 4$.

Inoltre, se definiamo

$$W(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

e teniamo conto che $2xy \le x^2 + y^2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, così che, per $x^2 + y^2 \le 2$, risulta

$$\left|4xy\left(x^2 + y^2 - 2\right)\right| \le 2\left(x^2 + y^2\right)\left(2 - x^2 - y^2\right),$$

si ha, sempre per $x^2 + y^2 \le 2$,

$$\begin{cases} W(0,0) = 0, \qquad W(x,y) > 0, \quad \forall (x,y) \ne (0,0), \\ \dot{W} = 4xy\left(x^2 + y^2 - 2\right) - \alpha\left(x^2 + y^2\right) \le \left(x^2 + y^2\right)\left(4 - 2(x^2 + y^2) - \alpha\right) \le -\varepsilon\left(x^2 + y^2\right), \end{cases}$$

purché $\alpha > 4$ (e quindi $\varepsilon \equiv \alpha - 4 > 0$).

Poiché $\dot{W}(0,0) = 0$ e $\dot{W}(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \in C \setminus \{(0,0)\}$ per $\alpha > 4$, la regione

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \le 2\}$$

è positivamente invariante. Possiamo dunque applicare il Teorema di Lyapunov per concludere che, per $\alpha > 4$, il punto $(0,0)$ è asintoticamente stabile e la regione C è contenuta nel bacino d'attrazione di $(0,0)$.

In conclusione il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine è asintoticamente stabile e la regione C è contenuta nel suo bacino d'attrazione è dato da $\alpha_0 = 4$.

---

(6) In corrispondenza del dato iniziale $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ si ha

$$H(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 0, \qquad y = x,$$

così che il moto si svolge lungo il segmento appartenente alla curva di livello $H(x,y) = 0$ e contenente il dato iniziale, *i.e.* lungo il segmento che unisce il punto P_1 al punto P_6 e

$$\dot{x} = 4x\left(x^2 - 1\right),$$

essendosi tenuto conto anche del verso di percorrenza del segmento. Si ha

$$t = \frac{1}{4}\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} = \int_{1/\sqrt{2}}^{x(t)} \frac{dx}{x\left(x^2 - 1\right)}.$$

Tenendo conto che

$$\frac{1}{x\left(x^2 - 1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right),$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2}\left(\int_{1/\sqrt{2}}^{x(t)} \frac{dx}{x-1} + \int_{1/\sqrt{2}}^{x(t)} \frac{dx}{x+1} - 2\int_{1/\sqrt{2}}^{x(t)} \frac{dx}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1 - x^2(t)}{x^2(t)}\right) - \log\left(\frac{1 - 1/2}{1/2}\right)\right] = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - x^2(t)}{x^2(t)}\right), \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1 - x^2(t)}{x^2(t)} = e^{8t},$$

che, risolta, dà

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{8t}}},$$

e quindi in particolare (tenuto conto che $y(t) = x(t)$) si ha $x(0) = y(0) = 1/\sqrt{2}$ (come deve essere) e

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = 1,$$

poiché $\lim_{t\to+\infty} e^{8t} = \infty$ e $\lim_{t\to-\infty} e^{8t} = 0$.

---

(7) In corrispondenza del dato iniziale $(\sqrt{2}, 0)$ si ha

$$H(\sqrt{2},0) = 0, \qquad y^2 = 2 - x^2 = \begin{cases} \sqrt{2-x^2}, & t > 0, \\ -\sqrt{2-x^2}, & t < 0, \end{cases}$$

così che il moto avviene lungo l'arco di cerchio appartenente alla curva di livello $H(x,y) = 0$ e contenente il dato iniziale (arco che collega il punto P_6 al punto P_9) e

$$\dot{x} = 4\left(1-x^2\right)\sqrt{2-x^2},$$

essendosi tenuto conto anche del verso di percorrenza, per $t \geq 0$, dell'arco di cerchio. In particolare, poiché la traiettoria è asintotica a P_6 per $t \to +\infty$ e a P_7 per $t \to -\infty$, deve essere $x(t) \in [1, \sqrt{2}]$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Si ha quindi

$$t = \frac{1}{4}\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} = \int_{\sqrt{2}}^{x(t)} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{2-x^2}}.$$

Operando prima il cambiamento di variabili $x \to y = 1/x$ (come suggerito nel testo), quindi il cambiamento di variabli $t \to z = \sqrt{2y^2 - 1}$, (così che, per $x \in [1, \sqrt{2}]$, si ha $y \in [1/\sqrt{2}, 1]$ e $z \in [0,1]$), possiamo riscrivere l'integrale come

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\sqrt{1/2}}^{y(t)} \frac{y\,dy}{(1-y^2)\sqrt{2y^2-1}} = \int_0^{z(t)} \frac{dz}{1-z^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{z(t)} \frac{dz}{z+1} - \int_0^{z(t)} \frac{dz}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z(t)}{1-z(t)}\right), \end{aligned}$$

essendosi tenuto conto che, se $x(0) = \sqrt{2}$, allora $y(0) = 1/\sqrt{2}$ e quindi $z(0) = 0$. Si ha quindi

$$\frac{1+z(t) =}{1-z(t)} = e^{8t},$$

che implica

$$z(t) = \frac{e^{8t}-1}{e^{8t}+1} = \frac{e^{4t}-e^{-4t}}{e^{4t}+e^{-4t}} = \frac{\sinh 4t}{\cosh 4t} = \tanh 4t,$$

e quindi

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2(t)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\tanh^2 4t}}.$$

Per $t \leq 0$, occorre prendere la determinazione negativa di y: il risultato è sempre dato dalla $x(t)$ sopra, che quindi è la soluzione del moto per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Poiché $y = \sqrt{2-x^2}$ per $t > 0$ e $y = -\sqrt{2-x^2}$ per $t < 0$, si trova

$$y(t) = \frac{\tanh 4t}{\sqrt{1+\tanh^2 4t}},$$

essendosi tenuto conto esplicitamente del segno di y (che è positivo per $t > 0$ e negativo per $t < 0$).

Quindi in particolare $x(0) = \sqrt{2}$ e $y(0) = 0$ (come deve essere) e

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1, \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 1, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 1, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = -1,$$

poiché $\lim_{t\to\pm\infty} \tanh 4t = \pm 1$.