

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 9-12-99

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

(1.1) Si ha

$$\begin{aligned}V(x) &= (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6, \\V'(x) &= \frac{dV}{dx} = 6x^5 - 24x^3 + 22x = 2x(3x^4 - 12x^2 + 11), \\V''(x) &= \frac{d^2V}{dx^2} = 30x^4 - 72x^2 + 22 = 2(15x^4 - 36x^2 + 11).\end{aligned}$$

L'equazione del moto è quindi

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2x(3x^4 - 12x^2 + 11).$$

(1.2) I punti stazionari di $V(x)$ sono i valori x tali che

$$\begin{cases}x^2 = 0, \\x^2 = 2 - 1/\sqrt{3}, \\x^2 = 2 + 1/\sqrt{3},\end{cases}$$

quindi sono i 5 valori

$$\begin{cases}x = 0, \\x = \pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}, \\x = \pm\sqrt{2 + 1/\sqrt{3}},\end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned}V(0) &= 0, & V'(0) &= 0 & V''(0) &= 22 > 0, \\V(\pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & V'(\pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}) &= 0, & V''(\pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}) &= 8(1 - 2\sqrt{3}) < 0, \\V(\pm\sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, & V'(\pm\sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}) &= 0, & V''(\pm\sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}) &= 8(1 + 2\sqrt{3}) > 0,\end{aligned}$$

Quindi i punti d'equilibrio sono 5:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{\pm 1} = (\pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}, 0), \quad P_{\pm 2} = (\pm\sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}, 0).$$

(1.3) I punti P_0 , P_{-2} e P_2 saranno punti d'equilibrio stabile, mentre i punti P_{-1} e P_1 saranno punti d'equilibrio instabile, come implica la seguente discussione.

Poiché i punti $x_0 = 0$ e $x_{\pm 1} = \pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}$ sono punti di minimo per l'energia potenziale $V(x)$, per il Teorema di Lagrange i punti P_0 , P_{-2} e P_2 sono punti d'equilibrio stabile per il sistema dinamico corrispondente

$$\begin{cases}\dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x); \end{cases}$$

basta infatti prendere

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_0)$$

oppure

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_{\pm 1})$$

come funzione di Lyapunov

Riguardo ai punti $P_{\pm 2}$ basta analizzare le curve di livello (cfr. il punto (1.4) successivo); alternativamente si può studiare il sistema linearizzato e verificare che uno dei due autovalori corrispondenti ha parte reale negativa.

(1.4) Ved. Figura.

(1.5) L'energia corrispondente al dato iniziale scelto è data da

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}^2 + V(\bar{x}) = 0 .$$

Dal grafico della curva $x \rightarrow V(x)$ si vede che il dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$ si trova su un'orbita chiusa, percorsa quindi da una traiettoria periodica.

(1.6) Si ha $E - V(x) = (1 - x^2)(2 - x^2)(3 - x^2)$, così che

$$T = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1 - x^2)(2 - x^2)(3 - x^2)}} .$$

(1.7) Se definiamo

$$\Phi(x) = (1 - x^2)(2 - x^2)(3 - x^2) ,$$

si ha

$$\Phi(x) = Q(x)(1 - x^2) = Q(x)(1 + x)(1 - x) ,$$

dove

$$Q(x) = (2 - x^2)(3 - x^2) .$$

Quindi per $x \in [-1, 1]$ si ha

$$1 \cdot 2 = 2 \leq Q(x) \leq 2 \cdot 3 = 6 ,$$

così che risulta

$$\Phi_2(x) \equiv 2(1 + x)(1 - x) \leq \Phi(x) \leq \Phi_1(x) \equiv 2(1 + x)(1 - x) .$$

Quindi

$$T_1 \leq T \leq T_2 ,$$

dove

$$T_j = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2\Phi_j(x)}} , \quad j = 1, 2 .$$

Thendno conto che

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \pi ,$$

si ha quindi

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{12}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{12}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{4}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4}} = \pi,$$

così che

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \leq T \leq \pi.$$

(1.8) Il dato iniziale $(\sqrt{2+1/\sqrt{3}}, 0)$ corrisponde alla posizione d'equilibrio instabile P_2 . Quindi

$$x(t) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \dot{x}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(1.9) Se $\dot{x}(0) > 0$ allora la corrispondente traiettoria è periodica (come si vede dallo studio delle curve di livello al punto (1.4)).

ESERCIZIO 2.

I Metodo.

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda)(-1 - \lambda)(1 - \lambda) = (-1 - \lambda)^2(1 - \lambda),$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1:$$

abbiamo quindi due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_3 = 1$ di molteplicità rispettivamente $n_1 = 2$ e $n_3 = 1$.

Possiamo scrivere $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$, dove $E_1 = \ker(A + \mathbb{1})^2$ e $E_2 = \ker(A - \mathbb{1})$.

Si ha

$$A + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

così che una base $\{v_1, v_2\}$ di E_1 è data dai vettori di componenti (x, y, z) tali che

$$(A + \mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

mentre una base $\{v_3\}$ di E_2 è data dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda_3 = 1$, *i.e.* dal vettore di componenti (x, y, z) tali che

$$(A - \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Dalla prima relazione otteniamo per le componenti di v_1, v_2 la relazione

$$z = 0 ,$$

che, per esempio, permette di scegliere

$$v_1 = (1, 0, 0) , \quad v_2 = (0, 1, 0) ,$$

mentre per le componenti di v_3 otteniamo

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = 0 , \\ -y + 2z = 0 , \end{cases}$$

così che la somma delle due equazioni implica $x = 0$, così che $y = 2z$; se scegliamo $z = 1$, abbiamo quindi

$$v_3 = (0, 2, 1) .$$

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = +1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = (1, 0, 0) , \\ v_2 = (0, 1, 0) , \\ v_3 = (0, 2, 1) . \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A .

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx , \quad Q^{-1} = P^T .$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

così che $\det Q = 1$. Si ha quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Scriviamo $A = S + N$, dove S è semisemplice e N è nilpotente. L'operatore rappresentato da S nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ è rappresentato nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ dalla matrice

$$S' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

così che si ha

$$\begin{aligned} S &= Q^{-1}S'Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$N = A - S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

così che N è effettivamente nilpotente.

Si ha allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = e^{t(S+N)} = e^{tS+tN} = e^{tS}e^{tN} = Q^{-1}e^{tS'}Qe^{tN},$$

dove

$$\begin{aligned} e^{tS} &= Q^{-1}e^{tS'}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$e^{tN} = \mathbf{1} + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & -2t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & -2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & -2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se il dato iniziale è $x(0) = (1, 1, 1)$ si ha allora

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} + te^{-t} - 2te^{-t} \\ e^{-t} + 2e^t - 2e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$, con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1, 1)$, è

$$\begin{cases} x_1(t) = (1-t)e^{-t}, \\ x_2(t) = 2e^t - e^{-t}, \\ x_3(t) = e^t. \end{cases}$$

II Metodo.

Scrivendo il sistema $\dot{x} = Ax$ nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 4x_3, \\ \dot{x}_3 = x_3, \end{cases}$$

si vede che la terza equazione dipende solo dalla funzione x_3 , quindi si può risolvere esplicitamente. Tenendo conto della condizione iniziale si ha

$$x_3(t) = e^t x_{03} = e^t .$$

Quindi la seconda equazione diventa

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 4e^t ,$$

che è un'equazione differenziale lineare non omogenea in x_2 . La soluzione si scrive nella forma

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{-t} \left[x_{02} + \int_0^t ds e^{-(-s)} 4e^s \right] = e^{-t} \left[1 + 4 \int_0^t ds e^{2s} \right] \\ &= e^{-t} \left[1 + 4 \left(\frac{e^{2t} - 1}{2} \right) \right] = e^{-t} [2e^{2t} - 1] = 2e^t - e^{-t} . \end{aligned}$$

Utilizzando le due espressioni trovate per x_2 e per x_3 , si trova per x_1 l'equazione

$$\dot{x}_1 = -x + (2e^t - e^{-t}) - 2e^t = -x + e^{-t} ,$$

che di nuovo è un'equazione differenziale lineare non omogenea, ora in x_1 . La soluzione si scrive nella forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} \left[x_{01} + \int_0^t ds e^{-(-s)} (-e^{-s}) \right] \\ &= e^{-t} \left(1 - \int_0^t ds 1 \right) = e^{-t} (1 - t) . \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione con condizioni iniziali $x_0 = (1, 1, 1)$ è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = (1 - t) e^{-t} , \\ x_2(t) = 2e^t - e^{-t} , \\ x_3(t) = e^t . \end{cases}$$

ESERCIZIO 3.

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 ,$$

così che gli autovalori di A sono dati entrambi da $\lambda = 3$, *i.e.* sono coincidenti.

Si ha allora

$$A = S + N ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} , \quad N \equiv A - S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned} (1) \quad [S, N] &\equiv SN - NS = 0 , \\ (2) \quad N^2 &= 0 , \end{aligned}$$

così che si ha

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt} = e^{3t} (\mathbb{1} + Nt) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} ,$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} ,$$

che, espressa per componenti, dà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{3t} [(1+t)x_{01} - tx_{02}] , \\ x_2(t) = e^{3t} [tx_{01} + (1-t)x_{02}] , \end{cases}$$

che costituisce la soluzione del sistema con dati iniziali (\bar{x}, \bar{y}) .