

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 10-01-2000

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

(1.1) Ponendo

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{R} = (m_1 + m_2)^{-1} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2), \end{cases}$$

le equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2, \end{cases}$$

con $\mathbf{F}_j = -\partial V / \partial \mathbf{r}_j$, diventano

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{R}} = 0, \\ \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\partial V / \partial \mathbf{r}, \end{cases}$$

dove $m = m_1 + m_2 = 4$ è la massa totale e $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 1$ è la massa ridotta.

Nel sistema del centro di massa occorre dunque considerare solo la seconda equazione.

(1.2) Tenuto conto delle leggi di conservazione del sistema e passando a coordinate polari, l'equazione

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\partial V / \partial \mathbf{r}, \quad \mu = 1,$$

dà per la variabile radiale ρ

$$\ddot{\rho} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(\rho)}{\partial \rho}, \quad V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2},$$

indicando con $|L|$ il modulo del momento angolare \mathbf{L} del sistema, *i.e.* $|L| = \|\mathbf{L}\|$.

Abbiamo quindi un sistema unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $\mu = 1$ sottoposto a una forza di energia potenziale (efficace)

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = \rho - \frac{1}{4}\rho^4 + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad \rho \geq 0.$$

Studiamo dunque la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$. Si ha

$$V'_{\text{eff}}(\rho) = 1 - \rho^3 - L^2 \rho^{-3} = -\rho^{-3} (\rho^6 - \rho^3 + L^2),$$

così che risulta $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per $\rho = \rho_{\pm}$, dove

$$\rho_{\pm}^3 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4L^2} \right).$$

Definendo

$$\Delta = 1 - 4L^2,$$

si vede quindi che la funzione $V'_{\text{eff}}(\rho)$ ammette due radici distinte, due radici coincidenti e nessuna radice, a seconda che sia $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Si ha quindi

$$\begin{cases} \rho_- = (1 - \sqrt{\Delta})/2, \rho_+ = (1 + \sqrt{\Delta})/2, & \text{se } |L| < 1/2, \\ \rho_- = \rho_+ = 1/2, & \text{se } |L| = 1/2, \\ \text{nessuna radice,} & \text{se } |L| > 1/2. \end{cases}$$

Poiché risulta

$$\begin{cases} V'_{\text{eff}}(\rho_{\pm}) = 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} V'_{\text{eff}}(\rho) < 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} V'_{\text{eff}}(\rho) < 0, \end{cases}$$

si vede che la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è come rappresentata in Fig. 1. Corrispondentemente nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ si ha la situazione rappresentata in Fig. 2.

(1.3) I punti d'equilibrio sono i punti $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_{\pm}, 0)$. Dalla Fig. 1 si evince quindi che si hanno:

- (i) due punti d'equilibrio, di cui uno stabile $(\rho_-, 0)$ e uno instabile $(\rho_+, 0)$, per $|L| < 1/2$;
- (ii) un punto d'equilibrio instabile $(1/2, 0)$, per $|L| = 1/2$;
- (iii) nessun punto d'equilibrio per $|L| > 1/2$.

Si possono avere traiettorie periodiche solo nel caso $|L| < 1/2$. Se, in tal caso, poniamo

$$E_{\pm} = V_{\text{eff}}(\rho_{\pm}),$$

e, più in generale,

$$H(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho),$$

si possono avere quindi traiettorie periodiche se il parametro $|L|$ e i dati iniziali $(\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}})$ verificano le seguenti tre condizioni:

- (a) $|L| < 1/2$;
- (b) $\bar{\rho} < \rho_+$;
- (c) $E_- < H(\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}}) < E_+$.

(1.4) Si ha

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2},$$

quindi

$$\theta(t) = \bar{\theta} + \int_0^t ds \frac{L}{\rho^2(s)},$$

dove $\bar{\theta} = \theta(0)$ è il valore iniziale della variabile angolare.

(1.5) Se il dato iniziale per la variabile radiale è $(\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}}) = (\rho_-, 0)$, con L tale che $|L| < 1/2$, allora si ha

$$\rho(t) = \rho_- \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

quindi

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\rho_-^2} = \frac{2L}{1 - 2L^2 - \sqrt{1 - 4L^2}} \equiv \omega$$

è costante. Ne segue che il moto è in tal caso un moto circolare uniforme con velocità angolare ω : in particolare è quindi un moto periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\rho_-^2}{L} = \frac{\pi}{L} \left(1 - 2L^2 - \sqrt{1 - 4L^2}\right).$$

(1.6) Le condizioni sotto cui il moto complessivo risulta periodico sono le seguenti. In primo luogo deve essere periodico il moto della variabile radiale, *i.e.* deve esistere $T > 0$ tale che $\rho(t) = \rho(t + T)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, se Θ indica l'incremento della variabile θ in un semiperiodo (*i.e.* in un tempo $T/2$), così che

$$\Theta = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{(2/L^2)(E - V_{\text{eff}}(\rho))}},$$

deve risultare

$$\Theta/2\pi \in \mathbb{Q},$$

i.e. Θ deve essere commensurabile con 2π .

Questo vuol dire che i dati iniziali, individuabili dando i valori $(L, E, \bar{\rho}, \bar{\theta})$ nonché il segno di $\dot{\rho}$, devono essere tali che siano soddisfatte le condizioni (a), (b) e (c) del punto (1.3) e, inoltre, risulti $\Theta/2\pi \in \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 2.

(2.1) Nel sistema κ il punto O' ha coordinate

$$\mathbf{q}_{O'} = (\sin t, 1 - \cos t, 0).$$

Si ha quindi

$$\mathbf{q} = D\mathbf{Q} = C\mathbf{B}\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{Q} + \mathbf{r},$$

con

$$\mathbf{r} = (\sin t, 1 - \cos t, 0)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = t.$$

Quindi la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ è data dalla composizione della rotazione B con la traslazione C , definita da $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$.

(2.2) Scriviamo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$. Si ha quindi

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = a \sin bt, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

mentre

$$\mathbf{q}(t) = D\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} x(t) = a \sin bt \cos t + \sin t, \\ y(t) = a \sin bt \sin t + 1 - \cos t, \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

(2.3) La velocità assoluta \mathbf{v} è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}.$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v} = (ab \cos bt \cos t - a \sin bt \sin t + \cos t, ab \cos bt \sin t + a \sin bt \cos t + \sin t, 0).$$

(2.4) La velocità relativa \mathbf{v}' è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}},$$

dove

$$\dot{\mathbf{Q}} = (ab \cos bt, 0, 0) .$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v}' = (ab \cos bt \cos t, ab \cos bt \sin t, 0) .$$

(2.5) La componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 è data da

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} .$$

Quindi

$$\mathbf{v}_0 = (\cos t, \sin t, 0) .$$

(2.6) La componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T è data da

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] ,$$

dove

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) , \quad \omega = 1 .$$

Quindi, tenuto conto che

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} = (a \sin bt \cos t, a \sin bt \sin t, 0) ,$$

si ha

$$\mathbf{v}_T = (-a \sin bt \sin t, a \sin bt \cos t, 0) .$$

Si può facilmente verificare che l'identità $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T$ è soddisfatta.

(2.7) La forza di Coriolis \mathbf{F}_2 è data da

$$\mathbf{F}_2 = -2 [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] ,$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) = (0, 0, 1)$. Quindi

$$\mathbf{F}_2 = (0, -2ab \cos bt, 0) .$$

(2.8) La forza centrifuga \mathbf{F}_3 è data da

$$\mathbf{F}_3 = -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] .$$

Poiché

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = (0, a \sin bt, 0) ,$$

si ha quindi

$$\mathbf{F}_3 = (a \sin bt, 0, 0) .$$

