Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL'08-11-00

CORREZIONE

<u>ESERCIZIO 1.</u>

I Metodo

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)(-\lambda)+1\right] = (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) \\ &= (4-\lambda)(\lambda-1)^2 , \end{aligned}$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 1 :$$

abbiamo quindi due autovalori distinti $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità rispettivamente $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$.

Possiamo scrivere $E = \mathbb{R}^3$ come somma diretta

$$\begin{aligned} &E = E_1 \oplus E_2, \\ &E_1 = \ker(A - 4\mathbb{1}), \qquad E_2 = \ker(A - \mathbb{1})^2 . \end{aligned}$$

Per il Teorema di decomposizione primaria A può essere scritta nella forma $A = S + N$, dove $A \in M_3$ è semisemplice, $N \in M_3$ è nilpotente e $[A, N] = 0$.

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in E costituita da elementi di due basi $\{v_1\}$ in E_1 e $\{v_2, v_3\}$ in E_2: in tale base l'operatore rappresentato da S nella base standard sarà rappresentato dalla matrice diagonale

$$S_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Una base $\{v_1\}$ di E_1 è data dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = 4$, *i.e.* dal vettore di componenti (x, y, z) tali che

$$(A - 4\mathbb{1})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 ,$$

da cui si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} y - 4z = 0 , \\ -2y - z = 0 , \end{cases}$$

così che si ottiene

$$y = z = 0,$$

mentre x può essere arbitrario (purché non nullo); quindi una soluzione non banale è (fissando $x = 1$)

$$v_1 = (1, 0, 0) \ .$$

Le componenti dei vettori della base $\{v_2, v_3\}$ di E_2 si determinano cercando le soluzioni (x, y, z) non banali dell'equazione

$$(A - \mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Si ha

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

quindi

$$(A - \mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

che fornisce l'unica relazione

$$x - z = 0 \ ,$$

che, per esempio, ammette soluzioni (scegliendo, rispettivamente $z = 1$ e $z = 0$)

$$v_2 = (1, 0, 1) \ , \qquad v_3 = (0, 1, 0) \ ;$$

infatti scelto $z = 1$ si deve avere $x = 1$, mentre y può essere arbitrario: otteniamo dunque una base fissando $y = 0$. Se $z = 0$ allora $x = 0$, mentre y può essere arbitrario (purché non nullo): quindi si può scegliere $y = 1$.

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \rightarrow \quad v_1 = (1, 0, 0), \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}\right\} & \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} v_2 = (1, 0, 1), \\ v_3 = (0, 1, 0), \end{array}\right. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx \ , \qquad Q^{-1} = P^T \ .$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

così che $\det Q = -1$. Si ha perciò

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Dovendo calcolare prima $Q^{-1}S_0Q$ per determinare S e dopo $Q^{-1}e^{S_0t}Q$ per determinare e^{St}, può essere utile in generale calcolare $Q^{-1}DQ$, con D matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ;$$

si ottiene allora

$$\begin{aligned} Q^{-1}DQ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

che per

$$a = 4, \qquad b = 1, \qquad c = 1,$$

dà

$$S = Q^{-1}S_0Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

mentre, per

$$a = e^{4t}, \qquad b = e^{t}, \qquad c = e^{t},$$

dà

$$e^{St} = Q^{-1}e^{S_0t}Q = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & e^{t}-e^{4t} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} .$$

Si ha quindi

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 ,$$

così che N è effettivamente nilpotente.

Si ha allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St+Nt} = e^{St}e^{Nt} = Q^{-1}e^{S_0t}Q\, e^{Nt} ,$$

dove

$$e^{Nt} = \mathbb{1} + Nt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & -t \\ 0 & t & -t \\ 0 & t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{pmatrix} .$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} e^{At} = e^{St}e^{Nt} &= \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & e^{t}-e^{4t} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{t} & (1-t)\,e^{t}-e^{4t} \\ 0 & (1+t)\,e^{t} & -te^{t} \\ 0 & te^{t} & (1-t)\,e^{t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Se il dato iniziale è $x(0) = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ si ha allora

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^t & (1-t)\,e^t - e^{4t} \\ 0 & (1+t)\,e^t & -te^t \\ 0 & te^t & (1-t)\,e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix},$$

che espressa per componenti dà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{4t}x_{01} + te^t x_{02} + \left[(1-t)\,e^t - e^{4t}\right] x_{03}, \\ x_2(t) = (1+t)\,e^t x_{02} - te^t x_{03}, \\ x_3(t) = te^t x_{02} + (1-t)\,e^t x_{03}. \end{cases}$$

II Metodo

Si procede come prima fino a determinare la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. In particolare si calcolano allo stesso modo le matrici Q e Q^{-1}.

Nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ l'operatore lineare è rappresentato dalla matrice $B = QAQ^{-1}$, tale che

$$B = S_0 + N_0,$$

dove S_0 è diagonale e N_0 nilpotente; più precisamente si ha

$$S_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice B è data da

$$\begin{aligned} B = QAQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

così che

$$N_0 = B - S_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che

$$N_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

così che N_0 è effettivamente nilpotente.

Si ha allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{Bt} = e^{(S_0+N_0)t} = e^{S_0 t + N_0 t} = e^{S_0 t} e^{N_0 t},$$

dove

$$e^{S_0 t} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

e

$$e^{N_0 t} = \mathbb{1} + N_0 t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & t \\ 0 & -t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & -t & 1+t \end{pmatrix} .$$

In conclusione si ha

$$e^{Bt} = e^{S_0 t} e^{N_0 t} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & -t & 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-t)\, e^t & te^t \\ 0 & -te^t & (1+t)\, e^t \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{aligned} e^{At} = Q^{-1} e^{Bt} Q &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-t)\, e^t & te^t \\ 0 & -te^t & (1+t)\, e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & -e^{4t} \\ 0 & te^t & (1-t)\, e^t \\ 0 & (1+t)\, e^t & -te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^t & (1-t)\, e^t - e^{4t} \\ 0 & (1+t)\, e^t & -te^t \\ 0 & te^t & (1-t)\, e^t \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Se il dato iniziale è $x(0) = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ si ha allora

$$x(t) = e^{At} x(0) = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^t & (1-t)\, e^t - e^{4t} \\ 0 & (1+t)\, e^t & -te^t \\ 0 & te^t & (1-t)\, e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix},$$

che espressa per componenti dà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{4t} x_{01} + te^t x_{02} + \left[(1-t)\, e^t - e^{4t}\right] x_{03}, \\ x_2(t) = (1+t)\, e^t x_{02} - te^t x_{03}, \\ x_3(t) = te^t x_{02} + (1-t)\, e^t x_{03}. \end{cases}$$

III Metodo

Si procede come prima fino a determinare la base gli autovalori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità, rispettivamente, $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$.

Si cerca quindi una soluzione della forma

$$x(t) = ae^{4t} + (b + ct)\, e^t,$$

dove i vettori $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ sono da determinare imponendo che $x(t)$ soddisfi il sistema di equazioni $\dot{x} = Ax$ e verifichi le condizioni iniziali $x(0) = x_0$.

Si ha innazitutto

$$\dot{x}(t) = 4ae^{4t} + (b + c)\, e^t + cte^t,$$

quindi $\dot{x} = Ax$, scritta per componenti, diventa

$$\begin{aligned} 4a_1 e^{4t} + (b_1 + c_1)\, e^t + c_1 te^t &= (4a_1 + a_2 - 4a_3)\, e^{4t} + (4b_1 + b_2 - 4b_3)\, e^t + (4c_1 + c_2 - 4c_3)\, te^t, \\ 4a_2 e^{4t} + (b_2 + c_2)\, e^t + c_2 te^t &= (2a_2 - a_3)\, e^{4t} + (2b_2 - b_3)\, e^t + (2c_2 - c_3)\, te^t, \\ 4a_3 e^{4t} + (b_3 + c_3)\, e^t + c_3 te^t &= (a_2)\, e^{4t} + (b_2)\, e^t + (c_2)\, te^t. \end{aligned}$$

Si ottengono quindi le 9 equazioni

$$\begin{cases} 4a_1 = 4a_1 + a_2 - 4a_3, \\ b_1 + c_1 = 4b_1 + b_2 - 4b_3, \\ c_1 = 4c_1 + c_2 - 4c_3, \\ 4a_2 = 2a_2 - a_3, \\ b_2 + c_2 = 2b_2 - b_3, \\ c_2 = 2c_2 - c_3, \\ 4a_3 = a_2, \\ b_3 + c_3 = b_2, \\ c_3 = c_2. \end{cases}$$

Abbiamo quindi 3 equazioni per a:

$$\begin{cases} 4a_1 = 4a_1 + a_2 - 4a_3, \\ 4a_2 = 2a_2 - a_3, \\ 4a_3 = a_2, \end{cases}$$

e 6 equazioni per (b, c):

$$\begin{cases} b_1 + c_1 = 4b_1 + b_2 - 4b_3, \\ c_1 = 4c_1 + c_2 - 4c_3, \\ b_2 + c_2 = 2b_2 - b_3, \\ c_2 = 2c_2 - c_3, \\ b_3 + c_3 = b_2, \\ c_3 = c_2. \end{cases}$$

Studiamo prima le equazioni per a, che possiamo riscrivere, semplificando,

$$\begin{cases} a_2 = 4a_3, \\ 2a_2 = -a_3, \\ 4a_3 = a_2, \end{cases}$$

così che si ottengono 2 equazioni indipendenti:

$$\begin{cases} a_2 = 4a_3, \\ 2a_2 = -a_3, \end{cases}$$

che ammettono soluzione $a_2 = a_3 = 0$, mentre a_1 è arbitrario: quindi

$$a = (\alpha, 0, 0), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le equazioni per (b, c), semplificando, diventano

$$\begin{cases} c_1 = 3b_1 + b_2 - 4b_3, \\ 0 = 3c_1 + c_2 - 4c_3, \\ c_2 = b_2 - b_3, \\ 0 = c_2 - c_3, \\ c_3 = b_2 - b_3, \\ c_3 = c_2. \end{cases}$$

Quindi, se $c_3 = \gamma$, si ottiene dalla sesta $c_2 = c_3 = \gamma$ e dalla seconda $3c_1 = 3c_3 = 3\gamma$, *i.e.* $c_1 = \gamma$, così che

$$c = (\gamma, \gamma, \gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Per b otteniamo quindi, ponendo $b_3 = \beta$, dalla quinta $b_2 = b_3 + c_3 = \beta + \gamma$ e dalla prima $3b_1 = \gamma + 4\beta - \gamma - \beta = 3\beta$, *i.e.* $b_1 = \beta$, così che

$$b = (\beta, \beta + \gamma, \beta), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte

$$x(0) = a + b = x_0$$

dà

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_{01}, \\ \beta + \gamma = x_{02}, \\ \beta = x_{03}, \end{cases}$$

così che si ha

$$\begin{cases} \alpha = x_{01} - x_{03}, \\ \beta = x_{03}, \\ \gamma = x_{02} - x_{03}; \end{cases}$$

in conclusione

$$\begin{cases} a = (x_{01} - x_{03}, 0, 0)\,, \\ b = (x_{03}, x_{02}, x_{03})\,, \\ c = (x_{02} - x_{03}, x_{02} - x_{03}, x_{02} - x_{03})\,, \end{cases}$$

che, inserita, in $x(t)$, dà, per componenti

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{4t} x_{01} + te^t x_{02} + \left[(1-t)\, e^t - e^{4t}\right] x_{03}, \\ x_2(t) = (1+t)\, e^t x_{02} - te^t x_{03}, \\ x_3(t) = te^t x_{02} + (1-t)\, e^t x_{03}. \end{cases}$$

IV Metodo

Nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 - 4x_3, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$$

le ultime due non dipendono da x_1, e si possono quindi scrivere nella forma

$$\dot{z} = A'z, \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se $z = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$.

Il polinomio caratteristico di A' è

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)\,(-\lambda) + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

così che esiste un solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità 2.

Possiamo allora scrivere

$$A' = S' + N', \qquad S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con N' nilpotente. Poiché $N' = A' - S'$, si trova subito

$$N' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si trova quindi immediatamente

$$e^{A't} = e^{(S'+N')t} = e^{S't} e^{N't},$$

dove

$$e^{S't} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

e

$$e^{N't} = \mathbb{1} + N't = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix},$$

così che, se indichiamo con $z_0 = (x_{02}, x_{03})$ il dato iniziale, si ha

$$z(t) = e^{A't} z_0 = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix},$$

che, scritta per componenti, diventa

$$\begin{cases} x_2(t) = (1+t)\, e^t x_{02} - te^t x_{03}, \\ x_3(t) = te^t x_{02} + (1-t)\, e^t x_{03}. \end{cases}$$

Torniamo ora all'equazione per x_1 e utilizziamo le espressioni trovate per x_2 e x_3: otteniamo quindi

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + B'(t), \qquad B'(t) = e^t \left[(x_{02} - 4x_{03}) + 3t\,(x_{03} - x_{02}) \right].$$

La soluzione sarà quindi

$$x_1(t) = e^{4t} \left\{ x_{01} + \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{-4s}\, e^s \left[(x_{02} - 4x_{03}) + 3s\,(x_{03} - x_{02}) \right] \right\}.$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{-3s} &= \frac{1 - e^{-3t}}{3}, \\ \int_0^t \mathrm{d}s\, 3s\, e^{-3s} &= \frac{1 - e^{-3t}\,(1+3t)}{3}, \end{aligned}$$

otteniamo quindi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{4t} x_{01} + e^{4t} \left[\frac{1 - e^{-3t}}{3}\,(x_{02} - 4x_{03}) + \frac{1 - e^{-3t}\,(1+3t)}{3}\,(x_{03} - x_{02}) \right] \\ &= e^{4t} x_{01} + e^{4t} \left[\frac{x_{02} - 4x_{03}}{3} + \frac{x_{03} - x_{02}}{3} \right] + e^t \left[\frac{4x_{03} - x_{02}}{3} + \frac{x_{02} - x_{03}}{3} \right] + te^t \left[x_{02} - x_{03} \right] \\ &= e^{4t} x_{01} + te^t \left[x_{02} - x_{03} \right] + \left[e^t - e^{4t} \right] x_{03} \\ &= e^{4t} x_{01} + te^t x_{02} + \left[(1-t)\, e^t - e^{4t} \right] x_{03}. \end{aligned}$$

Riassumendo la soluzione è quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{4t} x_{01} + te^t x_{02} + \left[(1-t)\, e^t - e^{4t} \right] x_{03}, \\ x_2(t) = (1+t)\, e^t x_{02} - te^t x_{03}, \\ x_3(t) = te^t x_{02} + (1-t)\, e^t x_{03}. \end{cases}$$

<u>Esercizio 2.</u>

(2.1) Data

$$H(x,y) = y\left(x^2 + y^3 - 1\right) = yx^2 + y^4 - y,$$

si ha

$$\begin{aligned} H_x &\equiv \frac{\partial H}{\partial x} = 2xy, \\ H_y &\equiv \frac{\partial H}{\partial y} = x^2 - 1 + 4y^3, \end{aligned}$$

così che si vede subito che risulta

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y, \\ \dot{y} = -H_y; \end{cases}$$

quindi

$$\dot{H} \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H_x\,\dot{x} + H_y\,\dot{y} = H_x H_y - H_x H_y = 0.$$

(2.3) I punti d'equilibrio sono i punti in cui si annulla il campo vettoriale. Scrivendo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \equiv x^2 - 1 + y^3, \\ \dot{y} = g(x,y) \equiv -2xy, \end{cases}$$

perché (x_0, y_0) sia un punto d'equilibrio si deve quindi avere $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

Quindi $g(x_0, y_0) = 0$ implica $x_0 = 0$ oppure y_0. Se $x_0 = 0$ allora $f(x_0, y_0) = 0$ è soddisfatta se $4y_0^3 - 1 = 0$, *i.e.* se $y_0 = (1/4)^{1/3}$, mentre se $y_0 = 0$ allora $f(x_0, y_0) = 0$ è soddisfatta se $x_0^2 - 1 = 0$, *i.e.* se $x_0 = \pm 1$.

Quindi i punti d'equilibrio sono:

$$P_1 = (1, 0), \qquad P_2 = (-1, 0), \qquad P_3 = (0, y_0),$$

dove

$$y_0 = (1/4)^{1/3}.$$

(2.3) Nell'intorno di un punto d'equilibrio $z_0 \equiv (x_0, y_0)$ il sistema linearizzato diventa

$$\dot{z} = A\,(z - z_0)\,, \qquad z = (x, y),$$

dove

$$A(z_0) = \begin{pmatrix} f_x(z_0) & f_y(z_0) \\ g_x(z_0) & g_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{xy}(z_0) & H_{yy}(z_0) \\ -H_{xx}(z_0) & -H_{xy}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 12y_0^2 \\ -2y_0 & -2x_0 \end{pmatrix}.$$

Se $z_0 = P_1$ si ha

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

quindi gli autovalori di $A(P_1)$ sono $\lambda = \pm 2$; possiamo quindi concludere che P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

Se $z_0 = P_2$ si ha

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi gli autovalori di $A(P_2)$ sono di nuovo $\lambda = \pm 2$; possiamo quindi concludere che anche P_2 è un punto d'equilibrio instabile.

Riguardo al punto $z_0 = P_3$ si ha

$$A(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 12y_0^2 \\ -2y_0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori $\lambda = \pm i\sqrt{6}$: quindi non possiamo concludere nulla.

Per discutere la stabilità di P_3 possiamo però applicare il Teorema di Ljapunov, cercando la funzione di Ljapunov nella forma

$$W(x,y) = \pm\,(H(x,y) - c)\,,$$

dove il segno e il valore della costante c vanno determinati come segue.

Innanzitutto notiamo che P_3 è un punto stazionario per $H(x,y)$, poiché $H_x(P_3) = H_y(P_3) = 0$. Sia $\mathcal{H}(x,y)$ la matrice hessiana della funzione H, *i.e.*

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 12y^2 \end{pmatrix} .$$

Quindi, in $z_0 = P_3$, si ha

$$\mathcal{H}(P_3) \equiv \mathcal{H}(0,y_0) = \begin{pmatrix} 2y_0 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 \end{pmatrix} ,$$

così che si vede che $\det \mathcal{H}(P_3) = 24y_0^3 = 6 > 0$ e $H_{xx}(P_3) = 2(1/4)^{1/3} > 0$: quindi P_3 è un punto di minimo per $H(x,y)$.

Possiamo allora porre

$$W(x,y) = H(x,y) - H(0,y_0) :$$

si vede allora immediatamente che le condizioni del Teorema di Lyapunov sono verificate; infatti

$$\begin{cases} W(0,0) = 0 \ , \\ W(x,y) > 0 \text{ in un intorno } B(0,0) \setminus \{(0,0)\} \ , \\ \dot W(x,y) = \dot H(x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

Il Teorema di Lyapunov garantisce quindi che P_3 è un punto d'equilibrio stabile.

(2.4) La curva di livello $H(x,y) = 0$ si ottiene cercando le soluzioni dell'equazione

$$y\left(x^2 + y^3 - 1\right) = 0.$$

Quindi la curva di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = 0 \right\}$$

è data da $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, dove $\mathcal{C}_1$ è la retta

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$$

e $\mathcal{C}_2$ è la curva

$$\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = y(x) \equiv \left(1 - x^2\right)^{1/3}\}.$$

Le due curve si intersecano nei due punti d'equlibrio $P_1 = (1,0)$ e $P_2 = (-1,0)$.

La curva $\mathcal{C}_2$ è simmetrica per riflessione rispetto all'asse y, poiché $y(x) = y(-x)$. Si ha

$$y'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{3}\left(1 - x^2\right)^{-2/3} ,$$

quindi, per $x < 0$, la curva è crescente, mentre, per $x > 0$, è decrescente; $x = 0$ è quindi un punto di massimo e $y(0) = 1$. Per $x \to \pm\infty$ si ha $y(x) \to -\infty$.

Per $x \approx 0$ si ha

$$\begin{aligned} y(x) &\approx 1 + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x^2=0} x^2 + O(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left.\left(1 - x^2\right)^{-2/3}\right|_{x^2=0} x^2 + O(x^4) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + O(x^4), \end{aligned}$$

mentre per $x \to \pm\infty$ si ha $y(x) \approx -x^{2/3}$; quindi $y(x)$ ha la concavità rivolta verso il basso vicino a $x = 0$ e verso l'alto per $x \to \pm\infty$. Ne segue che $y(x)$ deve avere due punti di flesso $\pm x_0$. Per indivuarne la posizione basta notare che si ha $y'(\pm 1) = \mp\infty$: quindi $x = \pm x_0$, con $x_0 = 1$, sono punti di flesso verticali.

Alternativamente si può studiare esplicitamente la derivata seconda di $y(x)$. Risulta:

$$\begin{aligned} y''(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{-2/3} - 2x^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-x^2\right)^{-5/3} \\ &= -\frac{2}{9}\left(1-x^2\right)^{-5/3}\left(3+x^2\right), \end{aligned}$$

così che si vede che si ha

$$\begin{cases} y''(x) > 0, & \text{se } |x| > 1, \\ y''(x) < 0, & \text{se } |x| < 1, \end{cases}$$

mentre $y''(\pm 1) = \pm\infty$: si ha pertanto un flesso verticale per $x = \pm 1$.

La curva di livello Γ_0 contiene 8 orbite: i 2 punti d'intersezione delle curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e altre 6 orbite; cfr. Fig. 1.

I versi di percorrenza sono come rappresentati in Fig. 1, e possono essere ricavati ragionando come segue.

Lungo la retta $\mathcal{C}_1$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

quindi y è identicamente nulla e

$$\begin{cases} \dot{x} > 0, & \text{se } |x| > 1\ , \\ \dot{x} < 0, & \text{se } |x| < 1\ . \end{cases}$$

Quindi $x(t)$ è una funzione crescente di t lungo le semirette $|x| > 1$, ed è una funzione decrescente lungo il segmento $|x| < 1$. Quindi, indicando i versi di percorrenza con delle frecce, si ha la situazione rappresentata in Fig. 1.

Lungo la curva $\mathcal{C}_2$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\left(1-x^2\right), \\ \dot{y} = -2x\left(1-x^2\right)^{1/3}, \end{cases}$$

così che

$$\begin{cases} \dot{x} > 0, & \text{se } |x| < 1\ , \\ \dot{x} < 0, & \text{se } |x| > 1\ . \end{cases}$$

Si ha quindi la situazione rappresentata in Fig. 1.

(2.5) Le curve di livello

$$\Gamma_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = c \right\}$$

sono come rappresentate in Fig. 2.

In particolare, all'interno della regione limitata A racchiusa dalle curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ le orbite sono tutte chiuse e contengono il punto d'equilibrio P_3 al loro interno (dal momento che si svolgono all'interno di una regione racchiusa da una componente connessa di una curva di livello contenente un unico punto d'equilibrio che è stabile): il verso di percorrenza si ottiene per continuità dal confronto con i versi di percorrenza lungo la curva di livello Γ_0.

All'esterno della regione A le orbite sono aperte: di nuovo la forma (qualitativa) e il verso di percorrenza di ogni singola orbita si possono ottenere con argomenti di continuità; cfr. la Fig. 2.