

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 05-09-00

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1)$. Si trovi la soluzione $x(t)$.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \sin x, \\ \dot{y} = y \cos x, \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{R}$.

(2.1) Determinare una costante del moto $H(x, y)$ tale che $H(0, 0) = 0$.

(2.2) Determinare le curve di livello.

(2.3) Determinare i punti d'equilibrio.

(2.4) Discuterne la stabilità.

(2.5) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, 1/3)$ è periodica.

ESERCIZIO 3. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo la spirale $r(t) = \theta(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre il piano (ξ, η) ruota con velocità angolare costante $\omega = 1$ intorno a O' . I due sistemi κ e K coincidono all'istante iniziale $t = 0$.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$.

(3.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = CB$, e determinare C e B .

(3.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.

(3.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(3.4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(3.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(3.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(3.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .

(3.8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .

(3.9) Determinare l'istante t_0 in cui il punto materiale P attraversa la circonferenza di raggio $R = 10$ e centro $C = (0, 0)$ nel piano (x, y) .