

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESAME 23-01-01

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(1+x^4)^{-1}, \\ \dot{y} = 4x^3(1+y^2)(1+x^4)^{-2}. \end{cases}$$

- (1.1) Determinare una costante del moto  $H(x, y)$  tale che  $H(0, 0) = 1$ .
- (1.2) Determinare le curve di livello di  $H(x, y)$ .
- (1.3) Determinare i punti d'equilibrio.
- (1.4) Discuterne la stabilità.
- (1.5) Verificare che non esistono traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), tale che l'asse  $\zeta$  di  $K$  coincide con l'asse  $z$  di  $\kappa$  e  $K$  ruota intorno all'asse  $\zeta = z$  con velocità angolare costante  $\omega$ . I due sistemi  $\kappa$  e  $K$  coincidono all'istante iniziale  $t = 0$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  sottoposto all'azione di una molla con costante elastica  $\lambda^2$  (così che se  $\mathbf{r}$  è lo spostamento di  $P$  rispetto a  $O \equiv O'$  la forza di richiamo è data da  $-\lambda^2\mathbf{r}$ ). All'istante iniziale  $t = 0$  il punto materiale ha velocità nulla.

- (2.1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = CB$ , e determinare  $C$  e  $B$ .
- (2.2) Scrivere l'equazione del moto nel sistema di riferimento mobile  $K$ . [Poiché il punto materiale è costretto a muoversi lungo l'asse  $\xi$ , qualsiasi componente della forza  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  non diretta lungo  $\xi$  è bilanciata da una corrispondente reazione vincolare e quindi non interviene nell'equazione del moto, in modo tale che le coordinate del punto materiale  $P$  lungo gli assi  $\eta$  e  $\zeta$  sono identicamente nulle].
- (2.3) Risolvere l'equazione del moto nel sistema  $K$  e determinare la traiettoria  $\mathbf{Q}(t)$  in tale sistema, al variare del parametro  $\omega$ .
- (2.4) Dimostrare che esiste un valore di  $\omega$  per il quale il punto materiale  $P$  risulta fermo nel sistema di riferimento  $K$ .
- (2.5) [FACOLTATIVO.] Discutere sotto quali condizioni su  $\omega$  la soluzione  $\mathbf{q}(t)$  descrive un moto periodico nel sistema di riferimento fisso  $\kappa$ .