

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESAME 19-02-01

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

**I Metodo**

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare  $A$  è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2 - \lambda) \left[ (3 - \lambda)^2 + 1 \right] = (2 - \lambda) (\lambda^2 - 6\lambda + 10) \\ &= (2 - \lambda) (\lambda - 3 - i) (\lambda - 3 + i) \end{aligned}$$

così che lo spettro di  $A$  è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 + i, \quad \lambda_3 = 3 - i :$$

abbiamo quindi tre autovalori distinti, uno reale ( $\lambda_1 = 2$ ) e due complessi coniugati ( $\lambda_2 = 3 + i$  e  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = 3 - i$ ).

Possiamo scrivere  $E = \mathbb{R}^3$  come somma diretta

$$\begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \\ E_1 &= \ker(A - 2\mathbf{1}), \quad E_2 = \ker(A - (3 + i)\mathbf{1}), \quad E_3 = \ker(A - (3 - i)\mathbf{1}), \end{aligned}$$

Cerchiamo una base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  in  $E$  costituita dagli autovettori di  $A$ : in tale base l'operatore rappresentato da  $A$  nella base standard sarà rappresentato dalla matrice diagonale

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + i & 0 \\ 0 & 0 & 3 - i \end{pmatrix}.$$

Le componenti dell'autovettore  $v_1$  si determinano cercando le soluzioni  $(x, y, z)$  non banali dell'equazione

$$(A - 2\mathbf{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce le due relazioni

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ -y + z = 0, \end{cases}$$

che, per esempio, ammettono soluzione

$$v_1 = (1, 1, 1).$$

Le componenti dell'autovettore  $v_2$  si determinano cercando le soluzioni  $(x, y, z)$  non banali dell'equazione

$$(A - (3 + i)\mathbf{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - i & 0 & 0 \\ -2 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce le relazioni

$$\begin{cases} x = 0, \\ -iy + z = 0, \\ -y - iz = 0, \end{cases}$$

così che una possibile soluzione è

$$v_2 = (0, 1, i).$$

Analogamente si trova per l'autovettore  $v_3$  l'espressione

$$v_3 = (0, 1, -i),$$

che si può anche ricavare, più semplicemente, notando che deve essere  $v_3 = \bar{v}_2$ .

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 + i \\ \lambda_3 = 3 - i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = (1, 1, 1), \\ v_2 = (0, 1, i), \\ v_3 = (0, 1, -i). \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

se  $\{e_1, e_2, e_3\}$  è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice  $A$ .

Siano  $y$  le coordinate nella base definita dagli autovettori  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Si ha allora

$$y = Qx, \quad Q^{-1} = P^T.$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}.$$

così che  $\det Q = -2i$ . Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -1-i & i & 1 \\ 1-i & i & -1 \end{pmatrix},$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$B = QAQ^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -1-i & i & 1 \\ 1-i & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix},$$

come deve essere.

Nelle coordinate  $y$  il sistema diventa

$$\dot{y} = By, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali  $y(0) = Qx(0)$ , dove

$$\begin{cases} y_1(0) = x_1(0) = 1, \\ y_2(0) = [-(1+i)x_1(0) + ix_2(0) + x_3(0)]/(2i) = -(1+i)/(2i), \\ y_3(0) = [(1-i)x_1(0) + ix_2(0) - x_3(0)]/(2i) = (1-i)/(2i); \end{cases}$$

la soluzione di tale sistema di equazioni si calcola immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t}y_1(0) = e^{2t}, \\ y_2(t) = e^{3t}e^{it}y_2(0) = -e^{3t}e^{it}(1+i)/(2i), \\ y_3(t) = e^{3t}e^{-it}y_3(0) = e^{3t}e^{-it}(1-i)/(2i), \end{cases}$$

che, espressa nelle coordinate  $x$ , diventa  $x(t) = Q^{-1}y(t)$ : quindi si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = e^{2t} - e^{3t}e^{it}\frac{1+i}{2i} + e^{3t}e^{-it}\frac{1-i}{2i}, \\ x_3(t) &= y_1(t) + iy_2(t) - iy_3(t) = e^{2t} - e^{3t}e^{it}\frac{1+i}{2} - e^{3t}e^{-it}\frac{1-i}{2}. \end{aligned}$$

Poiché la soluzione  $x(t)$  è reale, possiamo riscrivere le espressioni sopra tenendo conto che

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \end{aligned}$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ; troviamo quindi

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{2t} + \frac{1}{2i}e^{3t}e^{it}(-1-i) + \frac{1}{2i}e^{3t}e^{-it}(1-i) = e^{2t} - \frac{1}{2i}e^{3t}e^{it} - \frac{1}{2}e^{3t}e^{it} + \frac{1}{2i}e^{3t}e^{-it} - \frac{1}{2}e^{3t}e^{-it} \\ &= e^{2t} - e^{3t}\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) - e^{3t}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = e^{2t} - e^{3t}(\sin t + \cos t), \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} x_3(t) &= e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}e^{it}(-1-i) - \frac{1}{2}e^{3t}e^{-it}(1-i) = e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t}e^{it} + \frac{1}{2i}e^{3t}e^{it} - \frac{1}{2}e^{3t}e^{-it} - \frac{1}{2i}e^{3t}e^{-it} \\ &= e^{2t} - e^{3t}\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) - e^{3t}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = e^{2t} + e^{3t}(\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) = e^{2t} - e^{3t}(\sin t + \cos t), \\ x_3(t) = e^{2t} + e^{3t}(\sin t - \cos t). \end{cases}$$

## II Metodo

Altrimenti, una volta determinati gli autovalori e gli autovettori di  $A$ , invece che nella base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  si può lavorare nella base  $\{v_1, v, u\}$ , se poniamo  $v_2 = u + iv$ , quindi con

$$v = (0, 0, 1), \quad u = (0, 1, 0),$$

possiamo allora scrivere

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v \\ u \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se  $\{e_1, e_2, e_3\}$  è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice  $A$ .

Siano  $y$  le coordinate nella base  $\{v_1, v, u\}$ . Si ha allora

$$y = Qx, \quad Q^{-1} = P^T.$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

così che  $\det Q = -1$ . Si trova quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate  $y$  il sistema diventa

$$\dot{y} = By, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali  $y_0 \equiv y(0) = Qx_0$ , dove

$$\begin{cases} y_{01} = x_{01} = 1, \\ y_{02} = -x_{01} + x_{03} = -1, \\ y_{03} = -x_{01} + x_{02} = -1; \end{cases}$$

la soluzione nelle variabili  $y$  si calcola immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} y_{01} = e^{2t}, \\ y_2(t) = e^{3t} (y_{02} \cos t - y_{03} \sin t) = e^{3t} (-\cos t + \sin t), \\ y_3(t) = e^{3t} (y_{02} \sin t + y_{03} \cos t) = e^t (-\sin t - \cos t), \end{cases}$$

che, espressa nelle coordinate  $x$ , diventa  $x(t) = Q^{-1}y(t)$ : quindi si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) &= y_1(t) + y_3(t) = e^{2t} - e^{3t} (\cos t + \sin t), \\ x_3(t) &= y_1(t) + y_2(t) = e^{2t} + e^{3t} (\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

### III Metodo

Trovato lo spettro di  $A$ , si cerca una soluzione della forma

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{2t} + be^{3t}e^{it} + ce^{3t}e^{-t} \\ &= ae^{2t} + 2\operatorname{Re}(b)e^{3t}\cos t - 2\operatorname{Im}(b)e^{3t}\sin t, \end{aligned}$$

con  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  e  $c = (c_1, c_2, c_3)$  da determinarsi imponendo che  $x(t)$  risolva l'equazione  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  e soddisfi la condizione iniziale  $x(0) = x_0$ . Nel passare dalla prima alla seconda espressione, si è utilizzato il fatto che si deve avere  $c = \bar{b}$ , dal momento che la soluzione deve essere reale.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = 2ae^{2t} + b(3+i)e^{3t+it} + \bar{b}(3-i)e^{3t-it},$$

l'equazione  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  dà

$$\begin{aligned} 2a_1e^{2t} + (3+i)b_1e^{3t+it} + (3-i)c_1e^{3t-it} &= 2a_1e^{2t} + 2b_1e^{3t+it} + 2c_1e^{3t-it}, \\ 2a_2e^{2t} + (3+i)b_2e^{3t+it} + (3-i)c_2e^{3t-it} &= (-2a_1 + 3a_2 + a_3)e^{2t} \\ &\quad + (-2b_1 + 3b_2 + b_3)e^{3t+it} + (-2c_1 + 3c_2 + c_3)e^{3t-it}, \\ 2a_3e^{2t} + (3+i)b_3e^{3t+it} + (3-i)c_3e^{3t-it} &= (-a_2 + 3a_3)e^{2t} + (-b_2 + 3b_3)e^{3t+it} + (-c_2 + 3c_3)e^{3t-it}, \end{aligned}$$

che implica le 9 equazioni

$$\begin{cases} a_1 = a_1, \\ b_1(3+i) = 2b_1, \\ c_1(3-i) = 2c_1, \\ 2a_2 = -2a_1 + 3a_2 + a_3, \\ b_2(3+i) = -2b_1 + 3b_2 + b_3, \\ c_2(3-i) = -2c_1 + 3c_2 + c_3, \\ 2a_3 = -a_2 + 3a_3, \\ b_3(3+i) = -b_2 + 3b_3, \\ c_3(3-i) = -c_2 + 3c_3, \end{cases}$$

di cui si possono considerare solo le 6 per  $a$  e  $b$  (tenendo conto che quelle per  $c$  sono semplicemente le complesse coniugate di quelle per  $b$ ):

$$\begin{cases} a_1 = a_1, \\ b_1(3+i) = 2b_1, \\ 2a_2 = -2a_1 + 3a_2 + a_3, \\ b_2(3+i) = -2b_1 + 3b_2 + b_3, \\ 2a_3 = -a_2 + 3a_3, \\ b_3(3+i) = -b_2 + 3b_3. \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases} -2a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ b_1 = 0, \\ -a_2 + a_3 = 0, \\ ib_2 = -2b_1 + b_3, \\ ib_3 = -b_2, \end{cases}$$

così che si ha

$$a_1 = a_2 = a_3, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -ib_3;$$

possiamo quindi scrivere

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) = (\alpha, \alpha, \alpha), \\ b = (b_1, b_2, b_3) = (0, -i\beta, \beta), \\ c = (c_1, c_2, c_3) = (0, i\bar{\beta}, \bar{\beta}), \end{cases}$$

con  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  da determinarsi imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali.

Si ha dunque

$$\begin{cases} \alpha = x_{01} = 1, \\ \alpha - i(\beta - \bar{\beta}) = x_{02} = 0, \\ \alpha + (\beta + \bar{\beta}) = x_{03} = 0, \end{cases}$$

dove

$$\beta + \bar{\beta} = 2\operatorname{Re}(\beta), \quad i(\beta - \bar{\beta}) = -2\operatorname{Im}(\beta),$$

così che otteniamo

$$\alpha = 1, \quad \operatorname{Re} \beta = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} \beta = -\frac{1}{2},$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re} b = (0, 2\operatorname{Im}(\beta), 2\operatorname{Re}(\beta)) = (0, -1, -1), \\ 2\operatorname{Im} b = (0, -2\operatorname{Re}(\beta), 2\operatorname{Im}(\beta)) = (0, 1, -1). \end{cases}$$

In conclusione otteniamo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 e^{2t} + 2\operatorname{Re}(b_1) e^{3t} \cos t - 2\operatorname{Im}(b_1) e^{3t} \sin t = e^{2t}, \\ x_2(t) &= a_2 e^{2t} + 2\operatorname{Re}(b_2) e^{3t} \cos t - 2\operatorname{Im}(b_2) e^{3t} \sin t = e^{2t} - e^{3t} (\sin t + \cos t), \\ x_3(t) &= a_3 e^{2t} + 2\operatorname{Re}(b_3) e^{3t} \cos t - 2\operatorname{Im}(b_3) e^{3t} \sin t = e^{2t} + e^{3t} (\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 2.

(2.1) Si ha

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \left[ (y+1)^2 - x^2 \right] \left[ (y-1)^2 - x^2 \right] \\ &= y^4 + x^4 - 2y^2 - 2x^2 - 2x^2 y^2 + 1, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} H_x &\equiv \frac{\partial H}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2 - 4x = 4x(x^2 - y^2 - 1), \\ H_y &\equiv \frac{\partial H}{\partial y} = 4y^3 - 4yx^2 - 4y = 4y(y^2 - x^2 - 1), \end{aligned}$$

così che si ha

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = H_x H_y - H_y H_x = 0.$$

(2.2) Si ha  $\dot{x} = 0$  se  $y = 0$  oppure  $y^2 - x^2 - 1 = 0$ , e si ha  $\dot{y} = 0$  se  $x = 0$  oppure  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ . Se  $y = 0$  si deve avere  $x^2 - y^2 - 1 = x^2 - 1 = 0$ , quindi  $x = \pm 1$ , mentre se  $x = 0$  si deve avere  $y^2 - x^2 - 1 = y^2 - 1 = 0$ , quindi  $y = \pm 1$ ; non esistono altre soluzioni. In conclusione si hanno i 5 punti d'equilibrio:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (-1, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (0, -1).$$

(2.3) *Parte I.* Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio calcoliamo la matrice hessiana di  $H$ . Si ha

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} H_{xx}(x, y) & H_{xy}(x, y) \\ H_{yx}(x, y) & H_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4y^2 - 4 & -8xy \\ -8xy & 12y^2 - 4x^2 - 4 \end{pmatrix},$$

così che la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio di coordinate  $(x, y)$  è data da

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} H_{xy}(x, y) & H_{yy}(x, y) \\ -H_{xx}(x, y) & -H_{xy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8xy & 12y^2 - 4x^2 - 4 \\ -12x^2 + 4y^2 + 4 & 8xy \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} A(P_0) &= A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, & A(P_1) &= A(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \\ A(P_2) &= A(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, & A(P_3) &= A(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \\ A(P_4) &= A(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

così che si vede che gli autovalori sono  $\lambda = \pm 4i$  per  $P_0$ , e  $\lambda = \pm 4\sqrt{6}$  per  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ .

Possiamo quindi concludere che i punti  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  sono instabili.

Per determinare la stabilità di  $P_0$  studiamo prima la curva di livello  $H(x, y) = 0$ .

**(2.4) Parte I.** La curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$$

è data dai punti tali che valga almeno una delle due seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}(y + 1)^2 - x^2 &= 0, \\ (y - 1)^2 - x^2 &= 0.\end{aligned}$$

La prima individua le due rette

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1 + x\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1 - x\},\end{aligned}$$

mentre la seconda individua le due rette

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 + x\}, \\ \mathcal{R}_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x\}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\Gamma_0 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4.$$

Si noti che le 4 rette si intersecano in corrispondenza dei 4 punti d'equilibrio instabile; cfr. la Fig. 1.

Si ha

$$H(0, 0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x, 0) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} H(0, y) = \infty, \quad \lim_{a \rightarrow \pm\infty} H(a, a) = -\infty,$$

da cui si evince che la funzione  $H(x, y)$  è positiva nelle regioni tratteggiate rappresentate in Fig. 1.

**(2.3) Parte II.** In particolare la funzione  $H(x, y)$  è positiva nella regione chiusa  $\mathcal{D}$  delimitata dalle 4 rette: quindi l'origine è un punto di massimo relativo per  $H(x, y)$ .

Se definiamo la funzione di Lyapunov

$$W(x, y) = H(0, 0) - H(x, y) = 1 - H(x, y),$$

possiamo quindi applicare il teorema di Lyapunov; infatti preso comunque un intorno  $B$  dell'origine si ha

$$\begin{cases} W(0, 0) = 0, \\ W(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in B \setminus \{(0, 0)\}, \\ \dot{W}(x, y) = -\dot{H}(x, y) = 0, \end{cases}$$

così che possiamo concludere che il punto  $P_0 = (0, 0)$  è un punto d'equilibrio stabile.

**(2.4) Parte II.** Per determinare i versi di percorrenza delle orbite che costituiscono la curva di livello  $\Gamma_0$  si può ragionare come segue.

Lungo la retta  $y = 1 + x$  si ha

$$\dot{x} = 8x(1 + x),$$

quindi risulta  $\dot{x} > 0$  se e solo se  $x > 0$  oppure  $x < -1$ ; lungo la retta  $y = 1 - x$  si ha

$$\dot{x} = -8x(1 - x),$$

quindi risulta  $\dot{x} > 0$  se e solo se  $x < 0$  oppure  $x > 1$ .

Per continuità si determinano i versi di percorrenza lungo le altre rette. Si hanno quindi i versi di percorrenza rappresentati dalle frecce in Fig. 2.

**(2.5)** Le altre curve di livello (e i rispettivi versi di percorrenza) si determinano per continuità; cfr. la Fig. 2. In particolare le traiettorie all'interno della regione  $\mathcal{D}$  sono periodiche poiché  $\mathcal{D}$  è racchiusa da una componente connessa di una curva di livello e contiene al suo interno un solo punto d'equilibrio, che è stabile.

**(2.6)** Le traiettorie periodiche si possono individuare attraverso la seguente condizione sui dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$0 < H(\bar{x}, \bar{y}) < 1, \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq 1.$$

Un modo alternativo per individuarli è il seguente:

$$0 < H(\bar{x}, \bar{y}) < 1, \quad |\bar{x}| < 1, \quad |\bar{y}| < 1.$$

tali dati iniziali sono quindi quelli che si trovano all'interno della regione  $\mathcal{D}$  racchiusa dalle 4 rette (escluso il punto d'equilibrio  $P_0$ ).

**(2.7)** Per qualsiasi traiettoria periodica si ha,

$$H(x, y) = y^4 - 2y^2(x^2 + 1) + (1 + x^2)^2 = E,$$

dove  $E \in (0, 1)$  e  $|x|, |y| < 1$ .

Possiamo quindi esprimere  $y$  in funzione di  $x$  risolvendo l'equazione di secondo grado in  $y^2$  data da

$$y^4 - 2y^2(x^2 + 1) + (x^2 - 1)^2 - E = 0.$$

Si ha quindi

$$y^2 = x^2 + 1 \pm \sqrt{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2 + E} = x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^2 + E}.$$

Poiché si deve avere  $|y| < 1$  sola la determinazione negativa può descrivere una traiettoria periodica: quindi

$$y^2 = x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E},$$

da cui si ricava

$$y = y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}.$$

La traiettoria periodica percorrerà un'orbita che sarà descritta dalla curva  $y = y_+(x)$  nel semipiano superiore e dalla curva  $y = y_-(x)$  nel semipiano inferiore; cfr. la Fig. 3.

Le due curve si incontrano nei punti  $x = \pm x_0$  tali che  $y_{\pm}(\pm x_0) = 0$ . Quindi  $x_0$  si trova determinando gli zeri della funzione

$$f(x) = x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}.$$

Tali zeri saranno quindi dati dai valori  $x$  tali che

$$x^2 + 1 = \sqrt{4x^2 + E},$$

*i.e.* tali che

$$x^4 + 1 + 2x^2 = 4x^2 + E,$$

da cui si ottiene

$$(x^2 - 1)^2 = E.$$



In conclusione gli zeri vanno determinati nell'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1, \quad x^2 = \pm\sqrt{1 \pm E}\}.$$

Quindi sono i punti  $x = \pm x_0$ , con

$$x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{E}}.$$

In conclusione lungo la curva  $y_+(x)$  si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4y_+(x) (y_+^2(x) - x^2 - 1) = \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}} (x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E} - x^2 - 1) \\ &= -\sqrt{4x^2 + E} \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}. \end{aligned}$$

Poiché  $y_-(x) = -y_+(x)$  si ha

$$-\int_{x_0}^{-x_0} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + E} \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}} = \int_0^{T/2} dt,$$

dove  $T$  denota il periodo della traiettoria (e si è tenuto conto del verso di percorrenza della curva!).

Quindi, tenendo conto del fatto che l'integrando è pari in  $x$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + E} \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}} \\ &= 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + E} \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}}. \end{aligned}$$

In conclusione per ogni traiettoria periodica con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y})$  tali che  $H(\bar{x}, \bar{y}) = E$ , il periodo si può esprimere come integrale definito come

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + E} \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}},$$

dove  $x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{E}}$ .

