## Corso di laurea in Matematica

# Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame del 12-07-01

CORREZIONE

---

<u>Esercizio.</u> **(1)** Per derivazione esplicita si trova

$$\begin{cases} \partial H/\partial x \equiv H_x = 2x\left[\left(x^2y^2-1\right)+y^2\left(x^2-4\right)\right]\left(y^2-4\right), \\ \partial H/\partial y \equiv H_y = 2y\left[\left(x^2y^2-1\right)+x^2\left(y^2-4\right)\right]\left(x^2-4\right), \end{cases}$$

così che si vede immeiatamente che si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y, \\ \dot{y} = -H_x, \end{cases}$$

Si trova quindi

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H_x\dot{x} + H_y\dot{y} = H_xH_y - H_yH_x = 0,$$

che mostra che $H(x,y)$ è una costante del moto.

**(2)** Si ha $\dot{x} = 0$ se

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = \pm 2, \\ y^2 = (1+4x^2)/(2x^2), \qquad x \neq 0. \end{cases}$$

Se $y = 0$ si ha $\dot{y} = 0$ solo per $x = 0$.
Se $x = \pm 2$ si ha $\dot{y} = 0$ per $y = \pm 2$ oppure per $4y^2 - 1 = 0$, *i.e.* per $y = \pm 1/2$.
Se $x \neq 0$ e $y^2 = (1+4x^2)/(2x^2)$, si ha $\dot{y} = 0$ se risulta

$$\left(2x^2-4\right)\frac{1+4x^2}{2x^2} - 1 = 0,$$

*i.e.* se $x$ risolve l'equazione

$$\left(2x^2-4\right)\left(1+4x^2\right) - 2x^2 = 0,$$

che equivale all'equazione di secondo grado (in $z$)

$$2z^2 - 4z - 1 = 0, \qquad z = x^2;$$

le due soluzioni di tale equazione sono date da

$$z_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = 1 \pm \alpha, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

di cui $z_- = 1 - \alpha$ va scartata in quanto negativa. Si ha perciò

$$x^2 = 1 + \alpha,$$

e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1+4\,(1+\alpha)}{2\,(1+\alpha)} = \frac{5+4\alpha}{2\,(1+\alpha)} = \frac{(5+4\alpha)\,(1-\alpha)}{2\,(1+\alpha)\,(1-\alpha)} \\ &= \frac{5-\alpha-4\alpha^2}{2\,(1-\alpha^2)} = 6 - 5 + \alpha = 1 + \alpha = x^2, \end{aligned}$$

così che possiamo scrivere

$$x = \pm\sqrt{1+\alpha}, \qquad y = \pm\sqrt{1+\alpha}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

In conclusione si hanno i 17 punti d'equilibrio:

$$\begin{aligned}
&P_0 = (0,0),\\
&P_1 = (-2,-2), \qquad P_2 = (2,-2), \qquad P_3 = (2,2), \qquad P_4 = (-2,2),\\
&P_5 = (-2,-1/2), \qquad P_6 = (2,-1/2), \qquad P_7 = (2,1/2), \qquad P_8 = (-2,1/2),\\
&P_9 = (-1/2,-2), \qquad P_{10} = (1/2,-2), \qquad P_{11} = (1/2,2), \qquad P_{12} = (-1/2,2),\\
&P_{13} = (-\sqrt{1+\alpha}, -\sqrt{1+\alpha}), \qquad P_{14} = (\sqrt{1+\alpha}, -\sqrt{1+\alpha}),\\
&P_{15} = (\sqrt{1+\alpha}, \sqrt{1+\alpha}), \qquad P_{16} = (-\sqrt{1+\alpha}, \sqrt{1+\alpha}).
\end{aligned}$$

**(3)** *Parte I.* Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio calcoliamo la matrice hessiana di $H$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x,y) &= \begin{pmatrix} H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \\ H_{yx}(x,y) & H_{yy}(x,y) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \left(12x^2y^2 - 2 - 8y^2\right)\left(y^2-4\right) & 16x^3y^3 + 60xy - 32xy\left(x^2+y^2\right) \\ 16x^3y^3 + 60xy - 32xy\left(x^2+y^2\right) & \left(12x^2y^2 - 2 - 8x^2\right)\left(x^2-4\right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

così che la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio di coordinate $(x,y)$ è data da

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= \begin{pmatrix} H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \\ -H_{xx}(x,y) & -H_{xy}(x,y) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 16x^3y^3 + 60xy - 32xy\left(x^2+y^2\right) & \left(12x^2y^2 - 2 - 8x^2\right)\left(x^2-4\right) \\ -\left(12x^2y^2 - 2 - 8y^2\right)\left(y^2-4\right) & -16x^3y^3 + 60xy - 32xy\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per le proprietà di simmetria del sistema (più precisamente per il fatto che si ha $H(x,y) = H(\pm x, \pm y)$), è sufficiente studiare il comportamento del sistema nel I quadrante ($x \geq 0, y \geq 0$).

Quindi

$$\begin{aligned}
&A(P_0) = A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix},\\
&A(P_1) = A(2,2) = \begin{pmatrix} 240 & 0 \\ 0 & -240 \end{pmatrix}, \qquad A(P_5) = A(2,1/2) = \begin{pmatrix} -60 & 0 \\ 30 & 60 \end{pmatrix},\\
&A(P_9) = A(1/2,2) = \begin{pmatrix} -60 & -30 \\ 0 & 60 \end{pmatrix}, \qquad A(P_{13}) = A(\sqrt{1+\alpha}, \sqrt{1+\alpha}) = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

così che si vede che gli autovalori sono:
(i) $\lambda = \pm i8$ per $P_0$;
(ii) $\lambda = \pm 240$ per $P_1$ (e quindi per $P_2$, $P_3$ e $P_4$);
(iii) $\lambda = \pm 60$ per $P_5$ (e quindi per $P_6$, $P_7$ e $P_8$);
(iv) $\lambda = \pm 60$ per $P_9$ (e quindi per $P_{10}$, $P_{11}$ e $P_{12}$);
(v) $\lambda = \pm ?$ per $P_{13}$ (e quindi per $P_{14}$, $P_{15}$ e $P_{16}$).

Possiamo quini concludere che i punti $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}$ sono punti d'equlibrio instabile (perché hanno almeno un autovalore con parte reale negativa).

Per determinare la stabilità dei punti restanti, studiamo prima la curva di livello $H(x,y) = 0$.

**(4)** La curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = 0\}$$

è data dai punti tali che valga almeno una delle seguenti uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
&y^2 = \frac{1}{x^2} = 0, \\
&x^2 - 4 = 0, \\
&y^2 - 4 = 0.
\end{aligned}
$$

La prima individua le due iperboli

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ y = 1/x\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ y = -1/x\},
\end{aligned}
$$

mentre la seconda individua le due rette

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 2\}, \\
\mathcal{R}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -2\},
\end{aligned}
$$

e la terza individua le due rette

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 2\}, \\
\mathcal{R}_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -2\};
\end{aligned}
$$

si noti che ogni iperbole è costituita da due rami $x > 0$ e $x < 0$.

Quindi

$$
\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4.
$$

Si noti che le 6 curve si intersecano in corrispondenza dei punti d'equlibrio instabile trovati.

Per determinare il verso di percorrenza delle curve si può ragionare come segue (al solito per simmetria consideriamo solo il I quadrante). Se $y = 2$ si ottiene

$$
\begin{cases}
\dot{x} = 4\left(4x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right), \\
\dot{y} = 0,
\end{cases}
$$

quindi se $y = 2$, si ha $\dot{x} > 0$ per $x > 2$ oppure per $x < 1/2$.

Sulle curva $\mathcal{C}_1$ il campo vettoriale è dato da

$$
\begin{cases}
\dot{x} = (2/x)\left(1 - 4x^4\right)\left(x^4 - 4\right), \\
\dot{y} = -2x\left(1 - 4/x^2\right)\left(1/x^2 - 1\right),
\end{cases}
$$

quindi $\dot{x} > 0$ per $x \in (1/2, 2)$.

Gli altri versi di percorrenza si ricavano per continuità e per simmetria. La situazione è rappresentata in Figura 1.

Si noti che si ha

$$
H(0,0) = -16, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} H(x,0) = \lim_{y \to \pm\infty} H(0,y) = \infty, \qquad \lim_{a \to \pm\infty} H(a,a) = -\infty,
$$

da cui si evince che la funzione $H(x,y)$ è positiva nelle regioni tratteggiate rappresentate in Figura 2.

**(3)** *Parte II.* La funzione $H(x,y)$ è negativa nella regione chiusa $\mathcal{D}$ contenente in punto d'equlibrio $P_0$, e ha in $P_0$ un punto stazionario: quindi $P_0$ è un punto di minimo.

Se definiamo la funzione di Lyapunov

$$
W(x,y) = H(x,y) - H(0,0) = H(x,y) + 16,
$$

possiamo quindi applicare il teorema di Lyapunov; infatti preso comunque un intorno $B$ del punto $(0,0)$ si ha

$$\begin{cases} W(0,0) = 0, \\ W(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B \setminus \{(0,0)\}, \\ \dot{W}(x,y) = -\dot{H}(x,y) = 0, \end{cases}$$

così che possiamo concludere che il punto $P_0$ è un puntio d'equilibrio stabile

Analogamente si ricava che è stabile $P_{13}$ (e quindi anche $P_{14}, P_{15}, P_{16}$ ) notando che $P_{13}$ è un punto di massimo per $H(x,y)$, e riapplicando il teorema di Lyapunov utilizzando come funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(P_{13}) - H(x,y).$$

**(5)** Le altre curve di livello (e i rispettivi versi di percorrenza) si determinano per continuità; cfr. la Figura 3. In particolare le traiettorie all'interno della regione $\mathcal{D}$ e delle regioni $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ (cfr. la Figura 4) sono periodiche poiché ciascuna delle regioni considerate è racchiusa da una componente connessa di una curva di livello e contiene al suo interno un solo punto d'equilibrio, che è stabile.

**(6)** Le traiettorie periodiche si possono individuare attraverso la seguente condizione sui dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$?????.$$

**(7)** Il dato iniziale è dato da $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 1/4)$ si trova sulla curva $\mathcal{C}_1$, che è una curva invariante (essendo $\mathcal{C}_1 \subset \Gamma_0$). Quindi si ha $y = 1/x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Considerati i versi di percorrenza riportati in Figura 1, la soluzione con il dato iniziale scelto tende al punto $(2, 1/2)$ per $t \to \infty$. Inoltre la soluzione $(x(t), y(t))$, per tempi negativi, tende ad allontanarsi verso $x \to \infty$, avvicinandosi sempre di più all'asse $y = 0$. Esisterà quindi un tempo $T < 0$ tale che

$$\lim_{t \to T} (x(t), y(t)) = (\infty, 0);$$

dove, in principio, $T$ potrebbe essere sia finito sia infinito. Verificheremo al prossimo punto che si ha $T > -\infty$.

**(8)** L'equazione del moto per $x$ diventa quindi

$$\dot{x} = \frac{2}{x} \left(1 - 4x^2\right) \left(x^2 - 4\right),$$

che si può risolvere per separazione di variabili:

$$\int_{\bar{x}}^{x(t)} \mathrm{d}x \frac{x}{\left(1 - 4x^2\right) \left(x^2 - 4\right)} = 2 \int_0^t \mathrm{d}t' = 2t.$$

Il primo integrale dà

$$\int_{\bar{x}}^{x(t)} \mathrm{d}x \, \frac{x}{\left(1 - 4x^2\right) \left(x^2 - 4\right)} = \frac{1}{2} \int_{\bar{x}^2}^{x^2(t)} \mathrm{d}\xi \, \frac{1}{(1 - 4\xi)(\xi - 4)},$$

così che possiamo scrivere

$$\int_{\bar{x}^2}^{x^2(t)} \mathrm{d}\xi \, \frac{1}{(4\xi - 1)(\xi - 4)} = -4t;$$

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{(4\xi - 1)(\xi - 4)} = \frac{1}{15} \left( \frac{1}{\xi - 4} - \frac{4}{4\xi - 1} \right),$$

così che si ottiene

$$\int_{\bar{x}^2}^{x^2(t)} \mathrm{d}\xi \, \frac{1}{(4\xi-1)\,(\xi-4)} = \frac{1}{15} \log \left| \frac{\xi-4}{4\xi-1} \right| \Bigg|_{\xi=\bar{x}^2}^{\xi=x^2(t)}$$

$$= \frac{1}{15} \log \left( \frac{\xi-4}{4\xi-1} \right) \Bigg|_{\xi=\bar{x}^2}^{\xi=x^2(t)},$$

dove si è tenuto conto, per eliminare i moduli, che l'argomento del logaritmo è sempre positivo con la scelta fatta dei dati iniziali.

Otteniamo quindi

$$\log \left( \frac{x^2(t)-4}{4x^2(t)-1} \right) = \log \left( \frac{\bar{x}^2-4}{4\bar{x}^2-1} \right) - 60t = \log \frac{12}{63} - 60t,$$

e quindi, passando agli esponenziali,

$$\frac{x^2(t)-4}{4x^2(t)-1} = \frac{12}{63} e^{-60t},$$

che, risolta, dà

$$x(t) = \sqrt{\frac{4(63-3e^{-60t})}{63-48e^{-60t}}},$$

da cui si ricava

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} = \sqrt{\frac{63-48e^{-60t}}{4(63-3e^{-60t})}}.$$

è immediato verificare che la soluzione trovata soddisfa le condizioni iniziali; infatti si ha

$$x(0) = \sqrt{\frac{4 \cdot 60}{15}} = \sqrt{16} = 4;$$

inoltre si ha

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{4 \cdot 63}{63} = \sqrt{4} = 2,$$

e, se definiamo $T < 0$ tale che

$$63 - 48 e^{-60T} = 0,$$

si ha

$$\lim_{t \to T} x(t) = 0,$$

in accordo con i risultati trovati al punto precedente.