Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame del 18-01-2000

CORREZIONE

---

(1) Si cerca se esiste una funzione $H = H(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 - 2e^{-x^2} = \partial H/\partial y \ , \\ \dot{y} = -4xe^{-x^2}\,(y-1) = -\partial H/\partial x \ . \end{cases}$$

Integrando $\dot{x}$ rispetto a y si ottiene

$$H(x,y) = y^2 - y - 2ye^{-x^2} + c_1(x) \ ,$$

dove $c_1(x)$ è una funzione che dipenderà dalla sola variabile x; integrando $-\dot{y}$ rispetto a x si ottiene

$$H(x,y) = -2e^{-x^2}\,(y-1) + c_2(y) \ ,$$

dove $c_2(y)$ è una funzione che dipenderà dalla sola variabile y. Imponendo che le due espressioni trovate siano uguali si trova

$$H(x,y) = y^2 - y\left(1 + 2e^{-x^2}\right) + 2e^{-x^2} + c = (y-1)\left(y - 2e^{-x^2}\right) + c \ ,$$

dove c è una costante. Si può porre $c = 0$:

$$H(x,y) = (y-1)\left(y - 2e^{-x^2}\right) \ .$$

(2) Data la funzione H, le sue derivate prime sono

$$\begin{aligned} H_x &= 4xe^{-x^2}\,(y-1) \ , \\ H_y &= 2y - 1 - 2e^{-x^2} \ , \end{aligned}$$

quindi le derivate seconde di H sono date da

$$\begin{aligned} H_{xx} &= 4\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\,(y-1) \ , \\ H_{xy} &= 4xe^{-x^2} \ , \\ H_{yy} &= 2 \ . \end{aligned}$$

I punti d'equlibrio sono i punti in cui si annullano le derivate prime. Si ha $H_x = 0$ se $x = 0$ oppure se $y = 1$. La relazione $x = 0$, inserita nell'equazione $H_y = 0$, dà $2y - 3 = 0$, *i.e.* $y = 3/2$, mentre la relazione $y = 1$, inserita nell'equazione $H_y = 0$, dà $e^{-x^2} = 1/2$, *i.e.* $x^2 = \log 2$.

Quindi si hanno i seguenti 3 punti d'equlibrio:

$$\begin{cases} P_1 = (0, 3/2) \ , \\ P_2 = (\sqrt{\log 2}, 1) \ , \\ P_3 = (-\sqrt{\log 2}, 1) \ , \end{cases}$$

(3) *I parte.* Il sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio $P = (x_0, y_0)$ sarà della forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(P) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

dove la matrice $A(P)$ è data da

$$A(P) = \begin{pmatrix} H_{xy}(P) & H_{yy}(P) \\ -H_{xx}(P) & -H_{xy}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xe^{-x^2} & 2 \\ 4(1-2x^2)e^{-x^2}(y-1) & -4xe^{-x^2} \end{pmatrix} .$$

Per $P = P_1$ si ha

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

che non permette di trarre conclusioni. Al contrario per $P = P_2$ si ha

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\log 2} & 2 \\ 0 & -2\sqrt{\log 2} \end{pmatrix} ,$$

e, analogamente, per $P = P_3$ si ha

$$A(P_3) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\log 2} & 2 \\ 0 & 2\sqrt{\log 2} \end{pmatrix} ,$$

che ammettono entrambe un autovalore con parte reale positiva. Possiamo quindi concludere che i punti P_2 e P_3 sono punti d'equlibrio instabile.

Per discutere la stabilità di P_1 studiamo prima la forma delle curve di livello.

(1.4) *I parte.* Le curve di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x, y) = 0 \right\}$$

sono date dalle due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ definite, rispettivamente, dalle equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1\} , \\ \mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 2e^{-x^2}\} , \end{cases}$$

che si intersecano nei due punti $(-x_0, 1)$ e $(x_0, 1)$, con

$$x_0 = \sqrt{\log 2} ,$$

quindi in corrispondenza dei 2 punti d'equilibrio instabile P_2 e P_3 trovati al punto (2). Tali curve di livello conterranno quindi 8 orbite: i 2 punti d'intersezione delle due parabole devono essere ovviamente punti d'equilibrio (come del resto risulta dall'analisi precedente), altrimenti sarebbe violato il Teorema di unicità; per lo stesso motivo possiamo anche concludere che i 6 archi di curva separati dai punti d'equilibrio sono 6 orbite distinte.

I versi di percorrenza si possono determinare a partire dalle equazioni che definiscono il sistema, tenendo conto che:

(a) su $\mathcal{C}_1$ si ha $y \equiv 1$, quindi $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = 1 - 2e^{-x^2}$, così che $\dot{x} > 0$ per $|x| > x_0$ e $\dot{x} < 0$ per $|x| < x_0$;

(b) su $\mathcal{C}_2$ si ha $y = 2e^{-x^2}$, quindi $\dot{x} = 2e^{-x^2} - 1$, così che $\dot{x} > 0$ per $|x| < x_0$ e $\dot{x} < 0$ per $|x| > x_0$, mentre il segno di $\dot{y}$ risulta determinato di conseguenza.

Quindi lungo la curva $\mathcal{C}_1$ il verso di percorrenza è da sinistra a destra per $x < -x_0$ e $x > x_0$, mentre è da destra a sinistra per $-x_0 < x < x_0$. Lungo la curva $\mathcal{C}_2$, al contrario, il verso di percorrenza è da destra a sinistra a per $x < -x_0$ e $x > x_0$, mentre è da sinistra a destra per $-x_0 < x < x_0$. Per continuità si determinano la altre curve di livello e i loro versi di percorrenza. Cfr. la Fig. 1.

È facile verificare che la funzione H è negativa nelle regioni racchiuse tra le due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e positiva all'esterno di esse. Cfr. la Fig. 2.

Infatti
$$\begin{cases} H(0,\pm\infty) = \infty \ , \\ H(\pm\infty, 1/2) = -1/4 < 0 \ , \\ H(P_1) = -1/4 < 0 \ . \end{cases}$$
e si può allora ragionare per continuità tenendo conto che $H = 0$ solo lungo le curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

(3) *II parte.* Per studiare la stabilità del punto P_1 possiamo applicare il Teorema di Ljapunov, usando come funzione di Ljapunov
$$W(x,y) = H(x,y) - H(0,0) \ ,$$
e concludere che P_1 è stabile. Infatti la funzione $H(x,y)$ è negativa nelle regione racchiusa tra le due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e contenente il punto P_1. Quindi la funzione $W(x,y)$ verifica le proprietà
$$\begin{cases} W(P_1) = 0 \ , \\ W(x,y) > 0 \text{ in un intorno } B(P_1) \setminus \{P_1\} \ , \\ \dot{W}(x,y) = 0 \ , \end{cases}$$
che consentono di applicare il Teorema di Ljapunov, per concludere che P_1 è un punto d'equilibrio stabile.

(4) *II parte.* Le curve di livello
$$\Gamma_E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = E \right\}$$
per $E \neq 0$ si possono determinare facilmente. In particolare nella regione racchiusa dalle due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e contenente il punto d'equilibrio stabile tutte le orbite (distinte dal punto d'equilibrio stesso) sono chiuse e quindi percorse da traiettorie periodiche. Cfr. la Fig. 3.

Possiamo quindi caratterizzare i dati iniziali $(\bar{x},\bar{y})$ che generano traiettorie periodiche attraverso la condizione
$$0 > H(\bar{x},\bar{y}) > H(P_1) \ , \qquad |\bar{x}| < x_0 \ .$$

(5) Se il dato iniziale è
$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \ ,$$
si ha
$$\begin{aligned} H(\bar{x},\bar{y}) &= (\bar{y} - 1) \left(\bar{y} - 2e^{-\bar{x}^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{36} \ , \end{aligned}$$
così che si ha $H(\bar{x},\bar{y}) < 0$ e $0 < \bar{y} < 1$. Quindi il dato è nella regione in cui si hanno orbite chiuse: di conseguenza la traiettoria con quel dato iniziale è periodica.

(6) *I metodo.* Poiché
$$H(x,y) = (y-1) \left(y - 2e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{36} \ ,$$

si ha

$$y^2 - y\left(1 + 2e^{-x^2}\right) + \left(2e^{-x^2} + \frac{1}{36}\right) = 0\ ,$$

che permette di esprimere y in funzione di x. Si hanno quindi due soluzioni

$$y = \begin{cases} y_+(x)\ , \\ y_-(x)\ , \end{cases}$$

dove

$$y_\pm(x) = \frac{1}{2} + e^{-x^2} \pm \sqrt{e^{-2x^2} - e^{-x^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36}}\ .$$

Si hanno quindi due determinazioni corrispondenti a due archi di curva che si raccordano nei punti x_1 e x_2 in cui $y_+(x_1) = y_-(x_1)$ e $y_+(x_2) = y_-(x_2)$. Cfr. la Fig. 4.

Innazitutto per simmetria si vede che deve essere $x_1 = -x_2$. Tali punti saranno quindi le radici dell'equazione

$$e^{-2x^2} - e^{-x^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0\ .$$

Se chiamiamo $z = e^{-x^2}$, dobbiamo quindi studiare

$$z^2 - z + \frac{8}{36} = z^2 - z + \frac{2}{9} = 0\ ,$$

che ammette radici

$$z_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\ ,$$

così che troviamo le radici

$$e^{-x_+^2} = z_+ = \frac{2}{3}\ , \qquad e^{-x_-^2} = z_- = \frac{1}{3}\ ,$$

che dànno

$$x_+ = \pm\sqrt{(\log 3)/2}\ , \qquad x_- = \pm\sqrt{\log 3}\ ,$$

di cui solo la seconda è in modulo minore di $x_0 = \sqrt{\log 2}$ (e quindi può trovarsi all'interno della regione in cui ha luogo il moto periodico). In conclusione

$$x_1 = -x_+ = -\sqrt{(\log 3)/2}\ , \qquad x_2 = x_+ = \sqrt{(\log 3)/2}\ .$$

Quindi, tenendo conto che

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2y_\pm(x) - 1 - 2e^{-x^2}\ ,$$

si trova che il periodo della traiettoria periodica con il dato iniziale scelto è dato da

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2\ , \\ T_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{2y_-(x) - 1 - 2e^{-x^2}}\ , \\ T_2 &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{2y_+(x) - 1 - 2e^{-x^2}}\ , \end{aligned}$$

dove

$$2y_\pm(x) - 1 - 2e^{-x^2} = \mp 2\sqrt{e^{-2x^2} - e^{-x^2} + \frac{2}{9}}\ .$$

In conclusione

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{e^{-2x^2} - e^{-x^2} + (2/9)}}$$

esprime il periodo della traiettoria considerata come integrale definito.

(6) *II metodo.* Alternativamente si nota che la curva su cui si svolge il moto interseca l'asse y nei due punti

$$(0, y_1) \ , \qquad (0, y_2) \ ,$$

dove y_1 e y_2 sone le due radici dell'equazione

$$H(0,y) = (y-1)\,(y-2) = -\frac{1}{36} \ ,$$

i.e. sono dati dai valori di y tali che

$$y^2 - 3y + 2 + \frac{1}{36} = 0 \ .$$

Si trova quindi

$$y_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ , \qquad y_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ ;$$

quindi in particolare $y_2 = \bar{y}$, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è il dato iniziale. Cfr. la Fig. 5.

Si può quindi parametrizzare la curva su cui si svolge il moto come

$$x(y) = \begin{cases} x_+(y) \ , \\ x_-(y) \ , \end{cases}$$

dove i due archi di curva $x_+(y) \ge 0$ e $x_-(y) \le 0$ si raccordano nei punti y_1 e y_2, in cui si ha $x_\pm(y_1) = x_\pm(y_2) = 0$.

Poiché lungo l'orbita si ha

$$(y-1)\left(y - 2e^{-x^2}\right) + \frac{1}{36} = 0 \ ,$$

si ottiene

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{72\,(y-1)} = e^{-x^2} \ ,$$

che ammette le due soluzioni

$$x_\pm(y) = \pm\sqrt{\log \frac{72\,(y-1)}{1 + 36y\,(y-1)}} \ .$$

Quindi, poiché

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -4x_\pm(y)\, e^{-x_\pm^2(y)}\,(y-1) \\ &= \mp 2\left(y\,(y-1) + \frac{1}{36}\right)\sqrt{\log \frac{72\,(y-1)}{1 + 36y\,(y-1)}} \ , \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \ , \\ T_1 &= -\int_{y_2}^{y_1} \frac{dx}{2\,(y\,(y-1) + (1/36))\sqrt{\log\left[72\,(y-1)\,/\,(1+36y\,(y-1))\right]}} \ , \\ T_2 &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{2\,(y\,(y-1) + (1/36))\sqrt{\log\left[72\,(y-1)\,/\,(1+36y\,(y-1))\right]}} \ , \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$T = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{(y\,(y-1) + (1/36))\sqrt{\log\left[72\,(y-1)\,/\,(1+36y\,(y-1))\right]}} \ .$$