Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame dell' 01-02-2000

CORREZIONE

Esercizio 1.

(1.1) Si cerca se esiste una funzione $H = H(x, y)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2-1\right)\left(3y^2-1\right) = \partial H/\partial y \ , \\ \dot{y} = -y\left(y^2-1\right)\left(3x^2-1\right) = -\partial H/\partial x \ . \end{cases}$$

Integrando $\dot{x}$ rispetto a y si ottiene

$$H(x,y) = x\left(x^2-1\right)\left(y^3-y\right) + c_1(x) = xy\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) + c_1(x) \ ,$$

dove $c_1(x)$ è una funzione che dipenderà dalla sola variabile x; integrando $-\dot{y}$ rispetto a x si ottiene

$$H(x,y) = y\left(y^2-1\right)\left(x^3-x\right) + c_2(y) = xy\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right) + c_2(y) \ ,$$

dove $c_2(y)$ è una funzione che dipenderà dalla sola variabile y. Imponendo che le due espressioni trovate siano uguali si trova

$$H(x,y) = xy\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right) + c \ ,$$

dove c è una costante. Si può porre $c = 0$:

$$H(x,y) = xy\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right) \ .$$

(1.2) Data la funzione H, le sue derivate prime sono

$$\begin{aligned} H_x &= y\left(y^2-1\right)\left(3x^2-1\right) \ , \\ H_y &= x\left(x^2-1\right)\left(3y^2-1\right) \ , \end{aligned}$$

quindi le derivate seconde di H sono date da

$$\begin{aligned} H_{xx} &= 6xy\left(y^2-1\right) \ , \\ H_{xy} &= \left(3x^2-1\right)\left(3y^2-1\right) \ , \\ H_{yy} &= 6xy\left(x^2-1\right) \ . \end{aligned}$$

I punti d'equilibrio sono i punti in cui si annullano le derivate prime.

Si ha $H_x = 0$ se $y = 0$ oppure se $y = \pm 1$ oppure se $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Si ha $H_y = 0$ se $x = 0$ oppure se $x = \pm 1$ oppure se $y = \pm 1/\sqrt{3}$.

La relazione $y = 0$, inserita nell'equazione $H_y = 0$, implica che può essere $H_x = 0$ se $x = 0$ oppure se $x = \pm 1$. La relazione $y = \pm 1$, inserita nell'equazione $H_y = 0$, implica che può essere $H_x = 0$ se $x = 0$ oppure se $x = \pm 1$. La relazione $y = \pm 1/\sqrt{3}$, inserita nell'equazione $H_y = 0$, implica che può essere $H_x = 0$ se $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

Quindi i punti d'equlibrio sono i seguenti:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) , \qquad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) , \qquad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) , \qquad P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) ,$$
$$P_5 = (1,1) , \qquad P_6 = (1,-1) , \qquad P_7 = (-1,-1) , \qquad P_8 = (-1,1) ,$$
$$P_9 = (1,0) , \qquad P_{10} = (0,-1) , \qquad P_{11} = (-1,0) , \qquad P_{12} = (0,1) , \qquad P_{13} = (0,0) .$$

Cfr. la Fig. 1.

(1.3) *I parte.* Il sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio $P = (x_0, y_0)$ sarà della forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(P) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

dove la matrice $A(P)$ è data da

$$A(P) = \begin{pmatrix} H_{xy}(P) & H_{yy}(P) \\ -H_{xy}(P) & -H_{xx}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x^2-1)\,(3y^2-1) & 6xy\,(x^2-1) \\ -6xy\,(y^2-1) & -\,(3x^2-1)\,(3y^2-1) \end{pmatrix} .$$

Per $P = P_5$ si ha

$$A(P_5) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} ,$$

per $P = P_9$ si ha

$$A(P_9) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e per $P = P_{12}$ si ha

$$A(P_{12}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Quindi, per tali punti, gli autovalori della matrice del sistema linearizzato sono reali, uno positivo e uno negativo (strettamente). Ne concludiamo che i punti P_5, P_9, P_{12} sono punti d'equilibrio instabile.

Poiché $H(x,y)$ è invariante per le trasformazioni

$$\begin{cases} (x,y) \to (-x,-y) , \\ (x,y) \to (y,x) , \end{cases}$$

possiamo concludere che tutti i punti $P_5, \ldots, P_{12}$ sono d'equilibrio instabile.

Per il punto $P = P_{13}$ troviamo

$$A(P_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

quindi anche P_{13} è un punto d'equlibrio instabile.

Al contrario per $P = P_1$ si ha

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -4/3 \\ 4/3 & 0 \end{pmatrix} ,$$

che non permette di trarre conclusioni. Analogamente a prima possiamo concludere che lo stesso vale per i punti P_2, P_3, P_4.

Per discutere la stabilità di tali punti studiamo prima la forma delle curve di livello.

(1.4) Le curve di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = 0 \right\}$$

sono date dalle sei curve $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_6$ definite, rispettivamente, dalle equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\} \ , \\ \mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\} \ , \\ \mathcal{C}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1\} \ , \\ \mathcal{C}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -1\} \ , \\ \mathcal{C}_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1\} \ , \\ \mathcal{C}_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -1\} \ , \end{cases}$$

che si intersecano nei punti $P_5, \ldots, P_{13}$. Cfr. la Fig. 1.

Tenendo conto che

$$H(x,x) \geq 0 \ , \qquad H(x,-x) \leq 0 \ ,$$
$$H(y,1/2) \begin{cases} > 0 \ , & \text{se } 1 > y > 0 \text{ o } y < -1 \\ < 0 \ , & \text{altrimenti} \end{cases} \ ,$$

e dell'invarianza di $H(x,y)$ per le trasformazioni

$$\begin{cases} (x,y) \to (-x,-y) \ , \\ (x,y) \to (y,x) \ , \end{cases}$$

si ottiene che il segno di $H(x,y)$ è come indicato in Fig. 2.

In particolare possiamo quindi dire che P_1 e P_3 sono punti di massimo per $H(x,y)$, mentre P_2 e P_4 sono punti di minimo.

Le curve di livello Γ_E, per $E \neq 0$, sono come rappresentate in Fig. 3.

I versi di percorrenza si possono facilmente dedurre dalla forma delle equazioni del moto e sono come indicati in Fig. 3.

(3) *II parte.* Per studiare la stabilità dei punti $P_1, \ldots, P_4$ possiamo applicare il Teorema di Ljapunov, usando come funzioni di Ljapunov, rispettivamente,

$$\begin{cases} W_1(x,y) = -\left[H(x,y) - H(P_1)\right] \ , \\ W_2(x,y) = \left[H(x,y) - H(P_2)\right] \ , \\ W_3(x,y) = -\left[H(x,y) - H(P_3)\right] \ , \\ W_4(x,y) = \left[H(x,y) - H(P_4)\right] \ , \end{cases}$$

e concludere che sono punti d'equilibrio stabile. Infatt, per ogni $j = 1, \ldots, 4$, si ha $W(P_j) = 0$, la funzione $W_j(x,y)$ è strettamente positiva in un intorno del punto P_j privato del punto stesso e, infine, $\dot{W}(x,y) = 0$, essendo $H(x,y)$, e quindi $W(x,y)$, una costante del moto.

(1.5) Si hanno traiettorie periodiche in corrispondenza di dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ tali che

$$\begin{cases} |\bar{x}| < 1 \ , \qquad |\bar{y}| < 1 \ , \\ 0 < H(\bar{x},\bar{y}) < H(P_1) \ , \qquad 0 > H(\bar{x},\bar{y}) > H(P_2) \ . \end{cases}$$

Alternativamente possiamo caratterizzare i dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ che generano traiettorie periodiche dando le condizioni

$$\begin{cases} |\bar{x}| < 1 \ , \qquad |\bar{y}| < 1 \ , \\ H(\bar{x},\bar{y}) \neq 0 \ , \\ (\bar{x},\bar{y}) \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \ . \end{cases}$$

Esercizio 2.

(2.1) Se $\mathbf{q}_{0'}(t)$ indica la posizione del punto O' sull'ellisse al tempo t, denotiamo con $\theta(t)$ l'angolo (contato in senso antiorario) che il vettore $\mathbf{q}_{O'}(t)$ forma con l'asse x, tale che $\theta(0) = 0$ (così che $\mathbf{q}_{0'}(0) = (2,0,0)$) e con $\rho(t)$ il modulo del vettore $\mathbf{q}_{0'}(t)$, *i.e.* $\rho(t) = \|\mathbf{q}_{O'}(t)\|$. Cfr. Fig. 4.

Ponendo $\mathbf{q}_{O'}(t) = (x_{O'}(t), y_{O'}(t), z_{O'}(t))$ si ha, in coordinate cartesiane,

$$\frac{x_{O'}^2(t)}{4} + y_{O'}^2(t) = 1 , \qquad z_{O'}(t) \equiv 0 ,$$

tenendo conto che $\mathbf{q}_{O'}$ si trova sull'ellisse; poiché

$$\begin{cases} x_{O'}(t) = \rho(t)\cos\theta(t) , \\ y_{O'}(t) = \rho(t)\sin\theta(t) , \end{cases}$$

così che

$$\rho^2(t)\left(\frac{\cos^2\theta(t)}{4} + \sin^2\theta(t)\right) = 1 .$$

Quindi

$$\frac{\rho^2(t)}{4}\left(1 + 3\sin^2\theta(t)\right) = 1 ,$$

che, risolta, dà

$$\rho(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3\sin^2\theta(t)}} .$$

Si ha allora

$$\mathbf{q}_{O'} = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t), 0) = \left(\frac{2\cos\theta(t)}{\sqrt{1+3\sin^2\theta(t)}}, \frac{2\sin\theta(t)}{\sqrt{1+3\sin^2\theta(t)}}, 0\right) ,$$

che permette di esprimere $\mathbf{q}_{O'}(t)$ in termini di $\theta(t)$.

Quindi $\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}$, con

$$B = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

e

$$\mathbf{r} = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t), 0) = \left(\frac{2\cos\theta(t)}{\sqrt{1+3\sin^2\theta(t)}}, \frac{2\sin\theta(t)}{\sqrt{1+3\sin^2\theta(t)}}, 0\right) .$$

Possiamo perciò scrivere $\mathbf{q} = D\mathbf{Q}$, dove $D = CB$, con C che esprime la traslazione $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{r}$.

Si noti che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= (\dot\rho(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\dot\theta(t)\sin\theta(t), \dot\rho(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\dot\theta(t)\cos\theta(t), 0) \\ &= \left(-\frac{8\sin\theta(t)}{\left(1+3\sin^2\theta(t)\right)^{3/2}}, \frac{2\cos\theta(t)}{\left(1+3\sin^2\theta(t)\right)^{3/2}}, 0\right) . \end{aligned}$$

(2.2) Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) , \qquad \begin{cases} \xi(t) = vt , \\ \eta(t) = 0 , \\ \zeta(t) = 0 , \end{cases}$$

e

$$\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t)) , \qquad \begin{cases} \xi(t) = vt\cos\omega t + \rho(t)\cos\theta(t) , \\ \eta(t) = vt\sin\omega t + \rho(t)\sin\theta(t) , \\ \zeta(t) = 0 . \end{cases}$$

(2.3) Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \Big(v\cos\omega t - v\omega t\sin\omega t + \dot\rho(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\dot\theta(t)\sin\theta(t),$$
$$v\sin\omega t + v\omega t\cos\omega t + \dot\rho(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\dot\theta(t)\cos\theta(t), 0\Big) \ .$$

(2.4) Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = \Big(\dot\rho(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\dot\theta(t)\sin\theta(t), \dot\rho(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\dot\theta(t)\cos\theta(t), 0\Big) \ .$$

(2.5) Si ha

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = (v\cos\omega t, v\sin\omega t, 0) \ .$$

(2.6) Si ha

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-v\omega t\sin\omega t, v\omega t\cos\omega t, 0) \ ,$$

dove $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

(2.7) Si ha

$$\mathbf{F}_2 = -2\left[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}\right] = (0, -2\omega v, 0) \ ,$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B^{-1}\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.