AL1 - TUTORATO 6 - 13/11/2002

(1) (a) Provare che, per ogni n dispari:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv 0(\text{mod } n)$$

(b) Dire quali condizioni si deve avere affinché, per n dispari, si abbia:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \equiv 0(\text{mod } n)$$

(2) Dimostrare che non esistono $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tali che:

$$a^2 + b^2 = 4c - 1$$

(3) (a) Mostrare che, se p e q sono primi distinti, per ogni $a \in \mathbf{Z}$ tale che $a^p \equiv a(\text{mod } q)$ e $a^q \equiv a(\text{mod } p)$, allora:

$$a^{pq} \equiv a(\text{mod } pq)$$

(b) Mostrare che, se p e q sono primi distinti, e $a \in \mathbf{Z}$, allora:

$$a^{pq} \equiv a^{p+q-1}(\text{mod } pq)$$

(4) Trovare il piú piccolo intero $a > 2$ tale che:

$$2|a, 3|a+1, 5|a+3, 7|a+5$$

(5) Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} 3X \equiv 4(\text{mod } 5) \\ 6X \equiv 9(\text{mod } 12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7X \equiv 2(\text{mod } 13) \\ 2x \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 3x \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$$