AL1 - TUTORATO 2 (9 OTTOBRE 2002)

(1) Siano $x, y, z, \in \mathbf{Z}$ con $z \neq 0$. Mostrare che:
$$xz = yz \Leftrightarrow x = y, \ (\textit{legge di cancellazione}).$$

(2) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $|x|$ il *valore assoluto* (o *modulo*) di x, cosí definito:
$$|x| := \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$
Mostrare che, presi comunque $x, y, z \in \mathbf{R}$,
 (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
 (b) $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

(3) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca *parte intera* di x, in simboli $[x]$, il pi grande intero di $\mathbf{Z}$ minore o uguale ad x. Mostrare che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{Z}$
 (a) $0 \leq x - [x] < 1$;
 (b) $[n + x] = n + [x]$;
 (c) presi comunque $x, y \in \mathbf{R}^+$:
$$[x + y] \geq [x] + [y]$$
$$[xy] \geq [x][y]$$

(4) Dimostrare per induzione le seguenti proposizioni:
 (a) per $n \geq 1$: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
 (b) per $n \geq 0$: $2^n \geq n + 1$
 (c) per $n \geq 0$: $(n+1)! \geq 2^n$, dove $n! := n(n-1)(n-2)... \cdot 2 \cdot 1$.
 (d) per $h \in \mathbf{R}$, per $n \geq 1$: $(1+h)^n \geq 1+nh$, (*disuguaglianza di Bernoulli*).

(5) Dimostrare che:
 (a) se $x \in \mathbf{N}$,
$$x < 1 \Leftrightarrow x = 0$$
 (b) fissato $n \in \mathbf{Z}$, se $x \in \mathbf{Z}$:
$$x > n \Leftrightarrow x \geq n + 1$$

(6) Mostrare che, presi comunque $a, b \in \mathbf{Z}$ con $b \neq 0$, esiste $n \in \mathbf{Z}$ con $a < nb$, (*Proprietá Archimedea di* $\mathbf{Z}$).

(7) Mostrare che presi $a, b, c \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$:
 (a) $MCD(a, MCD(b, c)) = MCD(a, b, c) = MCD(MCD(a, b), c)$;
 (b) $MCD(a, 1) = 1$;
 (c) $MCD(ab, ac) = |a| \cdot MCD(b, c)$;
 (d) $MCD(a, b) = d \Rightarrow MCD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$;
 (e) $MCD(a, b) = 1 = MCD(b, c) \Leftrightarrow MCD(a, bc) = 1$;
 (f) $MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$;
 (g) se $b \neq 0$ e $a = bq + r$, con $0 \leq r < |b|$, allora:
$$MCD(a, b) = MCD(b, r).$$