Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 1- Andrea Cova (2 ottobre 2002)

1. Sia A un insieme qualsiasi, definiamo:
$P(A) := \{X : X$ è un sottoinsieme di $A\}$.
Dati due insiemi A e B, stabilire se le seguenti identità sono sempre vere:
$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$; $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$.

2. Sia X un insieme non vuoto. Presi comunque due sottoinsiemi A, B di X si ponga:
$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (*differenza simmetrica).*
Dati A , B , C tre sottoinsiemi di X, dimostrare che:
$(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.

3. Se A, B, C sono sottoinsiemi di un insieme fissato X, allora determinare quali tra le seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*:
(a) risulta sempre $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
(b) non si ha mai che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
(c) se $C \subset A$ allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

4. Supponiamo che siano 500 gli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Matematica.
Supponiamo che, tra loro, 450 conoscano l'inglese e 120 il francese. Supponiamo inoltre che ogni studente conosca almeno una di queste due lingue. Determinare il numero degli studenti che conoscono entrambe le lingue.
[Suggerimento : Sia S un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi).
Denotiamo con Card (S) il numero degli elementi distinti di S.
Sia X un insieme finito ed A e B due sottoinsiemi di X.
Allora si ha che: $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.]

5. Supponiamo che si posseggano le seguenti informazioni su un insieme X di persone:
coloro che sanno fare i conti (e ne esiste almeno uno) sono dei matematici e coloro che hanno una logica ferrea non sanno fare i conti.
Sulla base di tali informazioni, determinare quali tra le seguenti affermazioni possono essere dedotte:
(a) nessun matematico ha una logica ferrea;
(b) c'è almeno un matematico che non sa fare i conti;
(c) c'è almeno un matematico che non ha una logica ferrea.

6. Supponiamo che si conoscano le seguenti informazioni su un dato insieme non vuoto X di persone:
(1) Alcuni di coloro che amano i cani non amano i gatti;
(2) Alcuni di coloro che non amano i canarini amano i cani
Stabilire se le seguenti affermazioni possono essere dedotte da tali informazioni.
(a) Esiste almeno una persona che non ama i canarini e non ama i gatti;
(b) Esiste almeno una persona che non ama i canarini ed ama i gatti.

7. Sia S un insieme non vuoto. Nell'insieme $X: = P(S)$ si considerino gli insiemi A, B e C
Mostrare che:
(a) $A \Delta B = B \Delta A$; **(b)** $A \Delta \emptyset = A$; **(c)** $A \Delta A = \emptyset$; **(d)** $(A \Delta B)^* = (A^* \cap B^*) \cup (A \cap B)$;
(e) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$; **(f)** $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$; **(g)** $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
(dove con A^* si denota l'insieme complementare $S \setminus A$)

8. Presi A, B e C sottoinsiemi di un insieme finito X. Mostrare che:

$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$. (Sfruttare anche in questo caso il suggerimento proposto nell'esercizio n° 4)