

TUTORATO 4 - 23/10/2002

- (1) Siano X, Y, Z tre insiemi. Mostrare che:
- (a) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$
 - (b) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$
 - (c) $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$
- (2) Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, anti-simmetrica, totale sono soddisfatte dalle seguenti relazioni:
- (a) Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow x \text{ è perpendicolare a } x';$$
 - (b) Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow x \text{ è perpendicolare o parallela o coincidente a } x';$$
 - (c) Fissato $S \neq \emptyset$ e $S' \subseteq S$, nell'insieme $X := P(S)$:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow x \cap S' = x' \cap S';$$
 - (d) Nell'insieme $X := P(S)$ come in (c):

$$x\rho x' :\Leftrightarrow x \subseteq x';$$
 - (e) Nell'insieme $X := \mathbf{Z}$:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow x - x' \text{ è un multiplo di } 5;$$
 - (f) Nell'insieme $X := \mathbf{N}$:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow x \geq x';$$
 - (g) Nell'insieme $X := \mathbf{Z}$:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow xx' > 0;$$
 - (h) Come in (g), con $X := \mathbf{Z} \setminus \{0\}$;
 - (i) Come in (g), con

$$x\rho x' :\Leftrightarrow xx' < 0;$$
 - (j) Nell'insieme $X := \mathbf{R}$:

$$x\rho x' :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} | x = x' + k;$$
- (3) Mostrare che
- (a) se una relazione ρ su X è simmetrica, transitiva e tale che $\forall x \in X : \exists x' \in X | x\rho x'$, allora ρ è una relazione di equivalenza;
 - (b) una relazione simmetrica e transitiva non è in generale una relazione di equivalenza.
 - (c) una relazione ρ su X è di equivalenza se e solo se
 - (i) è riflessiva;
 - (ii) $\forall x, x', x'' \in X : x\rho x' \text{ e } x'\rho x'' \Rightarrow x''\rho x$;
- (4) Per le relazioni dell'esercizio 2 che siano risultate di equivalenza, descrivere esplicitamente l'insieme quoziente.