Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
AL 1
Esercizi per casa, III prova (19 novembre 2002)

Consegnare entro venerdì 29 novembre.

1. Risolvere le seguenti congruenze:

(a) $12X \equiv 8 \pmod{16}$

(b) $32X \equiv 7 \pmod{55}$

(c) $21X \equiv 14 \pmod{35}$

(d) $720X \equiv 480 \pmod{840}$

2. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze, sia per sostituzione che con la formula utilizata per dimostrare il teorema cinese dei resti.

(a) $\begin{cases} X \equiv 5 & \pmod{7} \\ X \equiv 7 & \pmod{11} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X \equiv 7 & \pmod{12} \\ X \equiv 15 & \pmod{17} \\ X \equiv 9 & \pmod{11} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} X \equiv 21 & \pmod{31} \\ X \equiv 20 & \pmod{32} \\ X \equiv 19 & \pmod{33} \end{cases}$

3. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

(a) $\begin{cases} 7X \equiv 2 & \pmod{8} \\ 5X \equiv 4 & \pmod{7} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5X \equiv 2 & \pmod{7} \\ 8X \equiv 11 & \pmod{13} \\ 7X \equiv 5 & \pmod{11} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 12X \equiv 15 & \pmod{9} \\ 8X \equiv 6 & \pmod{22} \\ 11X \equiv 7 & \pmod{13} \end{cases}$

4. (a) Dimostrare (senza usare la calcolatrice) che $144 \cdot 5^{739} \equiv -1 \pmod{7}$.

(b) Dimostrare che $2 \cdot (p-3)! \equiv -1 \bmod p$.

(c) Siano $n, a \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$ e $MCD(a, n) = MCD(a-1, n) = 1$. Dimostrare che $1 + a + a^2 + \ldots + a^{\phi(n)-1} \equiv 0 \bmod n$.

5. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, l'applicazione definita da $x \to \frac{ax+b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$. Determinare per quali valori di a, b e c l'applicazione f è biiettiva e descrivere esplicitamente l'applicazione inversa di$f$.