9. ESERCIZI SU CONTINUITA' E PUNTI DI DISCONTINUITA'

ESERCIZIO 1

Dire se le seguenti funzioni sono continue, e, in caso contrario, classificarne gli eventuali punti di discontinuitá:

$(a)\ f(x) = \begin{cases} ax + b \quad \text{per } x \leq x_0 \\ \\ c \quad \text{per } x > x_0 \end{cases}$

$(b)\ f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} \quad \text{per } x \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{per } x = 0 \end{cases}$

$(c)\ f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } x \in \mathbf{Q} \\ \\ 1 \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

$(d)\ f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \quad \text{per } x \neq 0 \\ \\ 1 \qquad \text{per } x = 0 \end{cases}$

$(e)\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$(f)\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

ESERCIZIO 2

Classificare i punti di discontinuitá della seguente funzione:

$g(x) = |[x]|^{\{x\}}$

ESERCIZIO 3

Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio a coefficienti reali, di grado pari. Se $a_0 < 0$, $a_n > 0$, provare che $P(x)$ ammette almeno una radice positiva ed una negativa.

ESERCIZIO 4

Sia $I = (a, b)$ un intervallo di $\mathbb{R}$, non necessariamente limitato né chiuso. Sia $f(x)$ continua in I e tale che $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Allora f ammette minimo su I.