Prova d'esame di AM1a - ANALISI MATEMATICA - soluzioni
13/01/2003

ESERCIZIO 1

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ x_n = n - \sqrt{n^2+1},\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

giustificando le risposte. Suggerimento: dimostrare che x_n é crescente.
Seguendo il suggerimento dimostriamo che la successione é crescente per ogni n naturale, cosí portemo concludere che il sup é il limite, e l'inf é il primo elemento, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$.

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow n+1-\sqrt{(n+1)^2+1} > n - \sqrt{n^2+1} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{n^2+1}+1 > \sqrt{n^2+2n+2}\ \Leftrightarrow\ \text{(quadriamo)}$$
$$\Leftrightarrow\ n^2+1+1+2\sqrt{n^2+1} > n^2+2n+2\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{n^2+1} > 2n\ \Leftrightarrow\ 4n^2+2 > 4n^2$$

l'ultima relazione é vera $\forall n \in \mathbf{N}$. Per concludere troviamo il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n^2-1}{n+\sqrt{n^2+1}} = 0.$$

$\sqcap\!\!\!\!\sqcup$

ESERCIZIO 2

Dire per quali valori del parametro reale t la seguente serie é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^n + n^{-3t}$$

Condizione necessaria : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} t^n + n^{-3t} = 0 \iff t \in (0,1)$$

Restringiamo lo studio della serie alle sole $t \in (0,1)$. Considero la serie come somma di due serie a termini postivi: la prima é una serie geometric di ragione t, che converge se $|t| < 1$, quindi converge per le t che stiamo considerando. La seconda é una serie armonica generalizzata e converge per $3t > 1$, quindi $t > \frac{1}{3}$. Concludendo la serie di partenza converge per $t \in (\frac{1}{3}, 1)$. ◻

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente limite (senza usare De L'Hopital):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}-1) - [\frac{\ln(x-1)}{2}]}{3+\cos x}.$$

Il limite si trasforma nel seguente (ricordiamo che $\cos x$ é limitato per ogni $x \in \mathbf{R}$):

$$\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{3+\cos x}$$

poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = 1$, per continuitá passiamo il limite dentro al logaritmo e otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

ESERCIZIO 4

Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-1}e^{-x}$$

determinarne:insieme di esistenza, limiti a $\pm\infty$ (se ha senso farli), limiti per $x \to x_0$ se x_0 é un punto di frontiera dell'insieme di esistenza, derivata, massimi e minimi relativi.

Insieme di esistenza: $\mathbf{R} \setminus \mathbf{0}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1}e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1}e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1}e^{-x} = -\infty$$

$$f'(x) = -e^{-x}\left(\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}\right) < 0 \quad \forall x$$

ESERCIZIO 5

Provare che

$$\ln\frac{x^2}{x-1} \geq \frac{1}{5} \quad \forall x > 1$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) = \ln\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{5} \quad x > 1$$

ne trovo il minimo e verifico se é maggiore di 0.

$$g'(x) = \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \iff x = 2$$

2 é un minimo e $g(2) = \ln 4 - \frac{1}{5} \geq 0$, infatti $4 > e^{\frac{1}{5}}$.