SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SU CONTINUITA' E PUNTI DI DISCONTINUITA'

ESERCIZIO 1

(a) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = ax_0 + b$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = c$, sapendo che una funzione é continua in un punto x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, allora f sará continua se $ax_0 + b = c$.

(b) $\lim_{x\to 0^-} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^+} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$, quindi non é possibile prolungare la funzione per continuitá in 0 perché in tale punto il limite non esiste.

(c) Sia x_0 un punto di $\mathbb{R}$ qualunque, e mostriamo che il limite destro (analogamente il limite sinistro), non esiste. Per assurdo supponiamo che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$, e sia positivo (non si perde di generalitá). Allora esiste $\delta > 0$ tale che per $x_0 < x < x_0 + \delta$, si ha $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$. Se il punto x in questione fosse razionale, quindi tale che $f(x) = 0$, si avrebbe $|f(x) - l| = |-l| = l < \frac{1}{2}$ $(*)$. Invece se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, si avrebbe

$$|f(x) - l| = |1 - l| < \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; l < \frac{3}{2} \text{ e } l > \frac{1}{2},$$

e questi valori di l sono incompatibili con $(*)$. Quindi il limite destro non esiste e la funzione non é continua in alcun punto di $\mathbb{R}$.

(d) $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| < |x|$, quindi $\lim_{x\to 0} \left|x \sin \frac{1}{x}\right| < |x| \to 0$. Definendo $f(0) = 0$, si rende la funzione continua.

(e) La funzione potrebbe avere una discontinuitá in 0. Calcoliamone il limite: $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, quindi definendo $f(0) = 0$ si prolunga la funzione per continuitá anche in 0.

(f) Poiché $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, ponendo $f(0) = 1$, rendiamo la funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2

Valutiamo limiti destro e sinistro in $x = n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to n^-} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x\to n^-} |n-1|^{\{x\}} = n-1$.
$\lim_{x\to n^+} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x\to n^+} n^{\{x\}} = n^0 = 1$.
Si deduce che la funzione é discontinua $\forall x \in \mathbb{N}$, tranne che in $x = 2$, infatti i limiti destro e sinistro coincidono, quindi in 2 la funzione é continua.

ESERCIZIO 3

Essendo $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$ e $P(0) = a_0 < 0$, la funzione $P(x)$ deve assumere tutti i valori tra $a_0 < 0$ e $+\infty$ perché é continua, quindi si annulla almeno una volta in $(-\infty, 0]$ e almeno una volta in $[0, +\infty)$.

ESERCIZIO 4

Supponiamo che l' intervallo sia finito, gli altri casi si possono trattare nello stesso modo.
Sia M tale che $M > f(\frac{a+b}{2})$, tale numero M sicuramente esiste perché la funzione é continua nell' intervallo, assume il valore $+\infty$ solo agli estremi, inoltre scegliamo il punto medio di (a, b) solo per individuare un punto interno, ma se ne puó scegliere uno qualunque. Per ipotesi sappiamo che $\exists\ \delta(M)$ tale che:

$$f(x) > M \text{ se } x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b),$$

infatti , poiché agli estremi $f(x)$ tende a $+\infty$, in un intorno opportuno degli estremi possiamo supporre che assuma valori comunque grandi. D' altra parte, per il Teorema di Wierstrass, f ammette minimo sui compatti, quindi $\exists x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$ tale che

$$(*)\ f(x) \geq f(x_0)\ \ \forall x \in [a+\delta, b-\delta].$$

In particolare, poiché $\frac{a+b}{2} \in [a+\delta, b-\delta]$, si ha anche $f(\frac{a+b}{2}) \geq f(x_0)$. Allora si ha:

$$(**)\ f(x_0) \leq f(\frac{a+b}{2}) < M < f(x) \quad \forall x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b).$$

Da $(*), (**)$ segue che $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (a, b)$.