4. SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI

ESERCIZIO 1

(i) riscriviamo il limite per sfruttare i limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin\frac{1}{n}(\ln n)^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}\frac{(\ln n)^2}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n+1}=1\cdot 1\cdot 0=0.$$

(ii) utilizziamo il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ con $a=(n+2)^{\frac{1}{3}}$ e $b=n^{\frac{1}{3}}$. Quindi il limite diventa

$$\lim_{n\to\infty}n\frac{(n+2-n)}{(n+2)^{\frac{2}{3}}+(n(n+2))^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+2)^{\frac{2}{3}}+(n(n+2))^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}.$$

Abbiamo ottenuto un quoziente di polinomi di grado 1 al numeratore e $\frac{2}{3}$ al denominatore, quindi il limite é $+\infty$.

(iii) riscriviamo il limite per sfruttare i limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n}{n^2-1}}=$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-1}}=1.$$

(iv) vogliamo ricondurci ad una forma del tipo $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_n}}$ con $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, e poi usare il limite notevole $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$. Risolviamo quindi l' equazione

$$\frac{1}{a_n}=1-\frac{n^2+n}{n^2-n+2},$$

che é verificata se $a_n = \frac{n^2-n+2}{2n-2}(\to \infty$ per $n \to \infty)$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n-2}{n^2-n+2}\right)^{a_n}\right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}} = e^2.$$

(v) riscriviamo il limite come

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}} = 3$$

abbiamo sfruttato il fatto che la progressione geometrica $p^n \to 0$ se $|p|<1$.

(vi) riscriviamo il limite come

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\cdot e = 1.$$

(vii) usiamo il Teorema dei Carabinieri per provare che il limite é 0.

$$\frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4} = n+\frac{2}{n} - \sqrt{n^2+4} \le n+\frac{2}{n} - \sqrt{n^2} = \frac{2}{n} \to 0.$$

D'altra parte si ha $n^2+4 < n^2+4+\frac{2}{n^2} = \left(n+\frac{2}{n}\right)^2$. Quindi:

$$n+\frac{2}{n} - \sqrt{n^2+4} > n+\frac{2}{n} - \left(n+\frac{2}{n}\right) = 0.$$

ESERCIZIO 2

Richiamiamo la definizione di limite:

$$L \text{ finito: } \lim_{n\to\infty} a_n = L \;\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\overline{n}:\ |a_n-L|<\varepsilon\ \forall\ n>\overline{n}.$$

$$L \text{ infinito: } \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \;\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\overline{n}:\ a_n > M\ \forall\ n>\overline{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-8n+4}{n-4} = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\overline{n}: \frac{n^2-8n+4}{n-4} > M \;\Leftrightarrow (\text{ per } n>4)$$

$$n^2-8n+4 > Mn-4M,$$

risolvendo l'equazione di secondo grado, troviamo che la disuguaglianza é verificata per valori di n esterni all' intervallo delle radici, che chiameremo x_1 e x_2, quindi se $n > x_2 = \overline{n}$ (se $x_2 > x_1$) sicuramente la disuguaglianza é verificata e cosí la definizione di limite.

$\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = 0 \;\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\overline{n}$:

$$\left|\ln(1+\frac{1}{n})\right| < \varepsilon\ \forall n>\overline{n}.$$

Tenendo conto che $\ln(1+\frac{1}{n})>0$, questa disuguaglianza é verificata se

$$1+\frac{1}{n}<e^{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow n>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}=\overline{n}.$$

$\lim_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}}=e \quad \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\overline{n}$:

$$\left|e^{1+\frac{1}{n}}-e\right|<\varepsilon.$$

Tenendo conto che $e^{1+\frac{1}{n}}>e$, si ha

$$e^{1+\frac{1}{n}}-e<\varepsilon \quad \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\varepsilon}{e} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{e}\right) \quad \Leftrightarrow n>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{e}\right)}=\overline{n}.$$

ESERCIZIO 3

$$a_n=\frac{(\cos n)\ln\left(5+e^{2n}\right)}{n^{\alpha}}=\cos n\cdot\frac{\ln e^{2n}\left(\frac{5}{e^{2n}}+1\right)}{n^{\alpha}}=$$
$$=\cos n\cdot\frac{\ln e^{2n}+\ln\left(\frac{5}{e^{2n}}+1\right)}{n^{\alpha}}=\cos n\cdot\frac{2n+\ln\left(\frac{5}{e^{2n}}+1\right)}{n^{\alpha}}=$$
$$=\cos n\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\left[2+\frac{\ln\left(\frac{5}{e^{2n}}+1\right)}{n}\right].$$

Sapendo che $\text{maxlim}\cos n=1$, $\text{minlim}\cos n=-1$, e che

$$\lim_{n\to\infty} 2+\frac{\ln\left(\frac{5}{e^{2n}}+1\right)}{n}=2,$$

si deduce che :
se $\alpha>1$, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$;
se $\alpha=1$, $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste e si ha $\text{maxlim}a_n=2$, $\text{minlim}a_n=-2$;
se $\alpha<1$, $\lim_{n\to\infty} a_n$ non eiste e $\text{maxlim}a_n=+\infty$, $\text{minlim}a_n=-\infty$. Riassumendo per $\alpha\geq 1$ la successione é limitata, solo per $\alpha>1$ ammette limite e per $\alpha<1$ é illimitata e non ha limite.

ESERCIZIO 4
(a) usando il primo Teorema, con $a_n=n^{\frac{1}{n}}$, che tende a 1, si deduce facilmente che $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+....+n^{\frac{1}{n}}}{n}=1$.
(b) usando il quarto Teorema, poiché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1\to+\infty.$$

(c) osserviamo che $\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=\left(\frac{(n!)}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, quindi sempre grazie al quarto Teorema, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1-1}=$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to \frac{1}{e} \text{ per } n \to +\infty.$$

(d) usiamo ancora il quarto Teorema, ponendo $\frac{(n!)^{\frac{1}{2n}}}{n} = \left(\frac{\sqrt{n!}}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)!}\; n^n}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{(n+1)}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

per quanto visto nell' esecizio precedente, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0.$$

ESERCIZIO 5

Se la successione a_n ammette limite, tutte le successioni estratte devono ammettere lo stesso limite, quindi un' implicazione é ovvia. D' altra parte, se a_{2k} e a_{2k-1} convergono allo stesso limite l, si avrá:

$$|a_{2k} - l| < \varepsilon \ \forall n > n_1,$$

$$|a_{2k-1} - l| < \varepsilon \ \forall n > n_2.$$

Quindi, se $n > \max(2n_1, 2n_2 - 1)$, risulta $|a_n - l| < \varepsilon$, quindi a_n tende a l. Osservazione importante: in generale se due sottosuccessioni estratte da una successione data tendono al medesimo limite l, non é affatto detto che la successione di partenza converga ad l. Peró, se le successioni estatte sono tali da esaurire tutti i possibili indici naturali, come accade per le successioni degli indici pari e dispari, allora si puó concludere che la successione di partenza tende allo stesso limite delle due sottosuccessioni.

ESERCIZIO 6

Essendo monotone, le due successioni a_{2n} e a_{2n-1} sicuramente ammettono limite, finito o infinito. Per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0 \ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

quindi grazie all' esercizio precedente, a_n ammette limite ed esso é uguale ad l.

ESERCIZIO 7

Vogliamo trovare una successione a_n che ammette limite, ma le due sottosuccessioni degli indici pari e dispari, pur essendo monotone, quindi ammettendo limite, non verificano la proprietá $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$. Basta scegliere $a_n = n$, essa ha limite $+\infty$, ma

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} 2n - 2n + 1 \equiv 1.$$