Prova d'esame di AM1a - ANALISI MATEMATICA
14/02/2003

ESERCIZIO 1

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme, utilizzando la caratterizzazione dei due estremi:

$$A = \left\{ x_n = (-1)^n \frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + 1}, \ n \in \mathbf{N} \right\}$$

Possiamo dividere l'insieme nel modo usuale: $A = A_{2k} \cup A_{2k-1}$, $k \in \mathbf{N}$, e poiché gli elementi con indice pari sono positivi, mentre quelli con indice dispari sono negativi, cercheremo il sup in A_{2k} e l'inf in A_{2k-1}. Iniziamo con il sup e osserviamo che per $n = 2k$,

$$x_n = \frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + \frac{1}{n}} = 1$$

quindi 1 é un maggiorante; dimostriamo che é il piú piccolo:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overline{n} : \ x_{\overline{n}} > 1 - \varepsilon$$

infatti

$$\frac{\overline{n}^2 + \frac{1}{\overline{n}}}{(\overline{n}^2 + 1)} > \frac{\overline{n}^2}{(\overline{n}^2 + 1)} > (1 - \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \varepsilon n^2 > 1 - \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \overline{n} > \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Quindi 1 é il sup dell'insieme.
Passiamo all' inf. Osserviamo che, per $n = 2k - 1$,

$$x_n = -\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + 1} \geq -1$$

e inoltre per $n = 1$ si ha $x_n = -1$, quindi -1 é un minimo. $\square$

ESERCIZIO 2

Dire per quali valori del parametro reale $x (> 1)$ la seguente serie é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(x-1))^{n^2}}{n^n}$$

Abbiamo a che fare con una serie geometrica, infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(x-1))^{n^2}}{n^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(\ln(x-1))^n}{n} \right)^n$$

quindi sappiamo che questo tipo di serie converge se la ragione, in questo caso $\frac{(\ln(x-1))^n}{n}$ é minore di uno in modulo. Ricordiamo il limite notevole $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} \to 0$ se e solo se $|a| < 1$, nel nostro caso $a = \ln(x-1)$. Quindi la serie converge se $|\ln(x-1)| < 1$, ovvero $-1 < \ln(x-1) < 1$, il che equivale e prendere x nell'intervallo $\left(1 + \frac{1}{e},\ 1 + e\right)$. $\square$

ESERCIZIO 3

Dire se la seguente funzione é uniformemente continua in $(-1, 1)$:

$$f(x) = (1 - x^2) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right)$$

Innanzitutto la funzione é continua nell'intervallo, quindi affinché sia uniformemente continua si deve controllare cosa succede agli estremi, quindi calcolare i limiti per $x \to -1^+$ e per $x \to +1^-$.

$$\lim_{x\to -1^+} (1 - x^2) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) = 0,$$

$$\lim_{x\to +1^-} (1 - x^2) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) = \lim_{x\to +1^-} (1 + x) \lim_{x\to +1^-} (1 - x) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) =$$
$$= 2 \lim_{y\to 0^+} y \ln \frac{y}{2} = 0$$

nell'ultimo passaggio abbiamo usato un limite notevole.
Essendo entrambi i limiti finiti, la funzione si puó estendere ad una funzione $\tilde{f}$ continua in $[-1, 1]$ che é compatto, quindi $\tilde{f}$ é u.c., ma siccome coincide con f sull'aperto $(-1, 1)$, anche f é u.c. $\square$

ESERCIZIO 4

Data la funzione

$$f(x) = \ln(1 + \sin x)$$

determinarne:insieme di esistenza, limiti a $\pm\infty$ (se ha senso farli), limiti per $x \to x_0$ se x_0 é un punto di frontiera dell'insieme di esistenza, derivata, massimi e minimi relativi.
La funzione é periodica con periodo 2π, quindi basta studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.
$I_E = [0, 2\pi] \setminus \{\frac{3}{2}\pi\}$.

Non ha senso fare i limiti a $\pm\infty$;

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^{\pm}} \ln(1+\sin x) = -\infty.$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} = 0 \;\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2}.$$

Il punto $x = \frac{\pi}{2}$ é un massimo relativo (anzi, é assoluto!), $f(\frac{\pi}{2}) = \ln 2$. Il punto $x = \frac{3}{2}\pi$ non appartiene all'insieme di def. della funzione, la derivata infatti é verticale.

ESERCIZIO 5

Calcolare, senza usare la regola di De l'Hopital, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{x^{\sin x} - 1}{\ln x}$$

Ci si puó ricondurre al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 0$ nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{x^{\sin x} - 1}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{\sin x \ln x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{e^{\ln x^{\sin x}} - 1}{\ln x^{\sin x}} = \lim_{f(x)\to 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 0.$$

Si usa il fatto che

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = 0.$$

$\square$