

11. ESERCIZI SULL' UNIFORME CONTINUITA'

Criteri e Teoremi:

- Se f é Lipschitziana in A , allora f é uniformemente continua (u.c.) in A ;
- Se f é derivabile in A , ed ha derivata limitata, allora f é uniformemente continua (u.c.) in A ;
- Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua in (a, b) . Se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l^+ \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l^- \in \mathbb{R},$$

possiamo estendere f ad una funzione \bar{f} u.c. in $[a, b]$, quindi f risulterà essere u.c. in (a, b) . Precisamente:

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ l^+ & x = a \\ l^- & x = b \end{cases}$$

- Viceversa se f é continua in (a, b) ma uno dei due limiti $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ non esiste oppure é uguale a $\pm\infty$, la f non é u.c. in (a, b) .

Teorema della farfalla: Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ u.c.. Allora esistono $A, B \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq Ax + B$. (*)

Questo teorema ci dá un' informazione in *negativo*, infatti possiamo usarlo per provare che una data funzione non é u.c., dimostrando che (*) non vale.

Teorema dell' asintoto: Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f é u.c. in $[a, +\infty)$. (Si ha l' analogo per una funzione definita in $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$.)

Osservazione Il viceversa non é vero! Esistono funzioni u.c. che non hanno asintoto orizzontale.

ESERCIZIO 1

Stabilire se le seguenti funzioni sono (u.c.) nei domini indicati:

(a) $f(x) = \log x$ in $[1, 2]$; $(0, 2]$; $(4, +\infty)$.

(b) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ in $(-1, 0) \cup (0, 1)$; $(1, +\infty)$.

(c) $f(x) = \sin x$ in \mathbb{R} .

(d) $f(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2+1}$ in $(1, 2)$, $[2, +\infty)$.

(e) $f(x) = x^3$ in $[a, +\infty)$.

(f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ in $[a, +\infty)$.

ESERCIZIO 2

Provare che, se f é u.c. in $(a, b]$ e $[b, c)$, allora lo é anche in (a, c) .

ESERCIZIO 3

Mostrare con esempi che il Teorema di Weierstrass non vale in un insieme

(i) illimitato,

(ii) non chiuso.