AM1b, a.a. 2002-2003 - Esercizi 1 [Soluzioni]

Silvia Mataloni, Giampiero Palatucci

10 marzo 2003

1. Si risolvano le seguenti disequazioni:

a. $|x^2-2| < x + |x+1|$

Occorre utilizzare la definizione di modulo: $|x^2-2|$ vale x^2-2 se $x^2-2 \geq 0$, e $-x^2+2$ altrimenti. Analogamente per $|2x-1|$.

Abbiamo così quattro sistemi:

$$\begin{cases} x < -\sqrt{2} \\ x^2 < x - x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x < 1 \\ 2 - x^2 < x - x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < \sqrt{2} \\ 2 - x^2 < x + x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - 2 < x + x + 1 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x < -\sqrt{2} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x < 1 \\ x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < \sqrt{2} \\ x < -1-\sqrt{2}, x > -1+\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

I primi due sistemi non hanno soluzione, il terzo è risolto per le $x \in (-1+\sqrt{2}, \sqrt{2})$, il quarto per $x \in [\sqrt{2}, 3)$.
Segue che la disequazione è soddisfatta per $x \in (-1+\sqrt{2}, 3)$.

b. $x|x| + |2x-1| > 0$

Soluzione: $x \in \big(-1-\sqrt{2}, +\infty\big)$.

c. $|x+3| > \sqrt{x+3}$

Occorre che sia definita la radice quadrata, quindi l'insieme delle soluzioni è un sottoinsieme di $[-3, +\infty)$. In questo sottoinsieme si ha: $x+3 \geq 0$, ne segue che la disequazione equivale al sistema:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x + 3 > \sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+3)^2 > x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+2)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \{x < -3\} \cup \{x > -2\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, +\infty).$$

d. $|\ln|x|| > 1$

Soluzione: $x \in (-\infty, -e) \cup \left(-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$.

e. $e^{(1-\ln x)} \geq 2$

Soluzione: $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right]$.

f. $|\cos x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

La disequazione equivale a $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Poiché $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ e $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}$, si ha: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$.

2. Si studi il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

a. $\sqrt{1 + \ln x}$;

La funzione $\ln x$ è definita per $x > 0$. Per estrarre la radice, la quantità $1 + \ln x$ non deve essere negativa. Si ha: $1 + \ln x \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$. Quindi la funzione è definita per $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

b. $\sqrt[4]{\ln\left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-x}\right)}$.

Soluzione: $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right] \cup (1, +\infty)$.

c. $\sqrt{2\sin x + 1}$.

La funzione $\sin x$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Per estrarre la radice occorre che la quantità $2\sin x + 1$ non sia negativa. Pertanto si deve avere $\sin x \geq -\frac{1}{2}$. Allora, l'insieme di definizione è $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

d. $\dfrac{x^{\sin x} + 1}{e^{\sin x} - 1}$.

Innanzitutto il denominatore non può essere nullo; si deve avere $e^{\sin x} - 1 \neq 0 \iff e^{\sin x} \neq 1 \iff \sin x \neq 0 \iff x \neq k\pi$ al variare di k in $\mathbb{Z}$. Inoltre, la base della funzione potenza deve essere positiva, i.e. $x > 0$. Quindi, il dominio della funzione è l'insieme $\{x > 0\} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.