AM1b, a.a. 2002-2003 - Esercizi 2 [Soluzioni]

Silvia Mataloni, Giampiero Palatucci

19 marzo 2003

Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{2x^3+1} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^4} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x}{x^3+2} = +\infty,$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-x} = -2;$

Calcoliamo il primo limite.
Si ha:

$$\frac{x^2+5}{2x^3+1} = \frac{x^3(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^3(2+\frac{1}{x^3})} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x^3}} \to 0.$$

L'ultimo limite è immediato:

$$\frac{x^2-1}{1-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} = -(x+1) \to -2.$$

2. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}) = -\infty, \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2+1}) = -\infty, \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-3}) = 0;$

Calcoliamo il primo limite.
E' sufficiente moltiplicare e dividere per la quantità $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}$:

$$(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3})\frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3})} = \frac{(x-2)-(x+3)}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3})} = \frac{-5}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3})} \to -\infty.$$

3. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1;$

Per calcolare il primo limite, operiamo la sostituzione $y = \frac{x}{a}$, supponendo che a sia diverso da zero (caso banale). Si ha:

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a \to e^a.$$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;$

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{a^x} = 0\ \ (a>1), \quad \lim_{x\to+\infty} 3^x - x^3 = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^7-1}{2^x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{3^x}{x^3}\right) = +\infty;$

Verifichiamo il secondo limite.

$$3^x - x^3 = 3^x\left(1-\frac{x^3}{3^x}\right) \to +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 2^x}{(1+x)(2^x-x)} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sqrt[3]{1+x}}{x} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{5^x} = 0;$

Verifichiamo il primo limite.

$$\frac{x^2 2^x}{(1+x)(2^x-x)} = \frac{2^x x^2}{2^x\left[(1+x)-\frac{x^2}{2^x}-\frac{x}{2^x}\right]} = \frac{x^2}{1+x-\frac{x^2}{2^x}-\frac{x}{2^x}} \to +\infty.$$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}. \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|\sin x|} = +\infty.$

Per il primo limite, è sufficiente moltiplicare e dividere per $\sqrt{x}$. Si ha:

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x}} = \frac{\tan x}{x}\sqrt{x} \to 1\cdot 0 = 0.$$

Per il secondo limite, usiamo la definizione di tangente: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Si ha:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2} \to 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$