AM1b, a.a. 2002-2003 - Esercizi 6 [Soluzioni]

Silvia Mataloni, Giampiero Palatucci

7 maggio 2003

1. Calcolare, usando la definizione, la derivata delle seguenti funzioni:

a. $\ln x$; **b.** e^{3x}; **c.** $\sin x$.

Occorre calcolare il limite del rapporto incrementale.
Vediamo per la funzione $\sin x$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)\\ &= \cos x+\lim_{h\to 0}h\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h^2}\right)=\cos x.\end{aligned}$$

2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, usando i teoremi sulla derivazione del prodotto e della composizione di funzioni:

a. a^x $(a>0, a\neq 1)$.

E' sufficiente scrivere a^x come $e^{\ln a^x}$, i.e. $e^{(\ln a)x}$.
Da cui: $(a^x)'=\left(e^{(\ln a)x}\right)'=(\ln a)e^{(\ln a)x}=(\ln a)a^x$.

b. $f(x)^{g(x)}$.

Si usa la stessa tecnica dell'esercizio precedente. Scriviamo, quindi, f^g come $e^{\ln f^g}$.

Si ha: $(f^g)'(x) = \left(e^{\ln f^g}\right)'(x) = \left(e^{g \ln f}\right)'(x) = (f^g)(x)\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$.

3. Usando le tabelle delle derivate delle funzioni elementari, calcolare (se esiste) la derivata delle funzioni seguenti, definite in tutto $\mathbb{R}$, studiando in particolare i punti in cui i teoremi generali non sono applicabili.

a. $f(x) = x \sin \sqrt[3]{x}$;

Se x è diverso da 0, i teoremi noti forniscono: $f'(x) = \sin \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}x|x|^{-\frac{2}{3}} \cos \sqrt[3]{x}$.

Osserviamo che questa formula perde di significato per $x = 0$ (la funzione $\sqrt[3]{\cdot}$ non è derivabile in 0), tuttavia esiste $f'(0)$.
Si ha:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin \sqrt[3]{x} = 0.$$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Abbiamo:

$$f'(x) = \frac{5x}{3\sqrt[3]{x^2}}, \ \forall x \neq 0;$$

$$f'(0) = 0.$$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 |x|}{\sqrt[3]{x^4}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Per ogni $x \neq 0$, si ha:

$$f'(x) = \left(2|x|^{-\frac{4}{3}} \sin |x| \cos |x| - \frac{4}{3}|x|^{-\frac{7}{3}} \sin^2 |x|\right) \operatorname{sign} x.$$

Non esiste, invece, $f'(0)$.
Infatti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin^2 |x|}{x^2 \sqrt[3]{x}} = \pm\infty.$$

4. Studiare la continuità in zero della seguente funzione e della sua derivata prima:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Infatti, esiste $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

La funzione f, inoltre, è derivabile su tutta la retta reale.

Si ha:

$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \ \forall x \neq 0;$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

Infine, la funzione $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è discontinua in $x = 0$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ in ogni punto del suo dominio. Calcolare inoltre $f(1)$ e $f(-1)$.
Possiamo applicare il *Teorema della derivata nulla*([1])?
Disegnare il grafico della funzione f.

La funzione è definita in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ed ha derivata nulla in tutti i punti del suo dominio:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0, \ \forall x \neq 0.$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \neq f(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi f non è costante. Infatti il Teorema della derivata nulla non si può applicare ad f, perché il dominio della funzione non è un intervallo.
Tuttavia, possiamo applicare il Teorema ad f ristretta a $(-\infty, 0)$ e separatamente ad f ristretta a $(0, +\infty)$.

[1] **Teorema della derivata nulla**. *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I. Se f' è identicamente nulla in I allora f è costante.*