AM1b - Teoria dei limiti, a.a. 2002/03

Comm. Prof.ssa Silvia Mataloni

Prova d'esame del 14 luglio 2003 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Studiare al variare di a e $b \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in $x = 1$ della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & \text{se } x > 1, \\ \\ ax + 2b, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

Svolgimento

Studio della continuità di f in $x = 1$.
Si ha:

$$f(1) = a + b,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax + 2b) = a + 2b,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi, f è continua in $x = 1$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + 2b = \frac{1}{2}$.

Studio della derivabilità di f in $x = 1$.
Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{ax + 2b - a - 2b}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x-1)}{(x-1} = a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x^2+1} - (a + 2b)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{x^2 - 1}{2(x-1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{x+1}{2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, f è derivabile in $x = 1$ per $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{cases} a + 2b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}.$$

[Suggerimento: $\sin(\pi x) = -\sin(\pi x - \pi)$.]

Svolgimento

Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)} &= \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{-\sin(\pi x - \pi)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(1 + x)(x - 1)}{\sin(\pi(x - 1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \left(\frac{1 + x}{\pi} \right) \cdot \frac{\pi(x - 1)}{\sin(\pi(x - 1)} \quad = \quad \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

usando il limite notevole: $\dfrac{\sin y}{y} \to 1$ per $y \to 0$.

ESERCIZIO 3

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = e^{x + |x^2 - 1|}$$

e disegnarne un grafico approssimativo.

Svolgimento

La funzione è definita su tutta la retta reale ed è sempre positiva.
Inoltre $f(x)$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Poiché

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ 1 - x^2, \text{ se} -1 < x < 1, \end{cases}$$

si ha:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2 + x - 1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ e^{-x^2 + x + 1}, \text{ se} -1 < x < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2+x-1} = +\infty.$$

Non vi sono asintoti.
Studiamo la monotonia della funzione e cerchiamo eventuali punti estremali.
La funzione è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$; I punti $x=-1$ e $x=1$ sono punti angolosi. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1)e^{x^2+x-1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ (-2x+1)e^{-x^2+x+1}, \text{ se} -1 < x < 1. \end{cases}$$

Da cui:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

Quindi il punto $x = \dfrac{1}{2}$ è un punto di massimo locale per f.

Studiamo la concavità della funzione.
Si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} ((2x+1)^2+2)e^{x^2+x-1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ (4x^2-4x-1)e^{-x^2+x+1}, \text{ se} -1 < x < 1. \end{cases}$$

Da cui:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1, \infty).$$

Quindi il punto $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di flesso per f.

ESERCIZIO 4

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx.$$

Svolgimento

Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx \\
&= [-\cos x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{\cos^3 x}{3} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 - \left(\frac{-\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$