# AM1b, a.a. 2002-2003 - I Esonero (Soluzioni)

Comm. Prof.ssa Silvia Mataloni

14 aprile 2003

**1.** Calcolare i seguenti limiti:

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{5x^3+3x^2}{5x-7}}-x=1.$

Scriviamo la funzione in una forma più comoda.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{5x^3+3x^2}{5x-7}}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{\frac{5x^3+3x^2}{5x-7}}+x}{\sqrt{\frac{5x^3+3x^2}{5x-7}}+x} &= \frac{10x^2}{(5x-7)\left(\sqrt{\frac{5x^3+3x^2}{5x-7}}+x\right)}\\ &= \frac{10x^2}{\sqrt{(5x^3+3x^2)(5x-7)}+x(5x-7)}\to 1.\end{aligned}$$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$

Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot\frac{-\sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{4^x}=0.$

Il limite è zero, perché l'esponenziale al denominatore tende ad infinito più "velocemente"del polinomio $x^3+1$.

**2.** Dire se la seguente funzione è continua e, in caso contrario, classificarne le discontinuità.

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^{-1} & x > 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

La funzione è continua per ogni $x \neq 1$. In $x = 1$ presenta un punto di infinito (discontinuità di seconda specie).
Infatti:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{-1} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0.$$

**3.** Studiare il carattere delle seguenti serie:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3}$ diverge.

Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, in quanto la successione $\dfrac{3^n}{n^3}$ non è infinitesima.
Si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n^3} = +\infty.$$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$ converge.

Usiamo il *Criterio della Radice*.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Da cui la convergenza della serie.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ converge.

Possiamo usare il *Criterio del Rapporto.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)+1}{(n+1)!}}{\dfrac{n+1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0.$$

Quindi la serie converge.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-3}$ converge.

La convergenza segue dal *Criterio di Leibniz.*
Infatti, la successione $\dfrac{1}{3n-3}$ è non negativa, infinitesima e decrescente.

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ converge assolutamente? Sì.

Poiché $|\sin(n^2)| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, la serie data si può maggiorare con la serie armonica di potenza 2, quindi si ha la convergenza assoluta, per il *Criterio del Confronto.*

**4.** Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{x^2+nx}$ converge e calcolarne la somma.

Si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{x^2+nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{x^2} e^{nx} = e^{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^x)^n.$$

Osserviamo che $\sum (e^x)^n$ è una *serie geometrica* di ragione $e^x$, quindi si ha la convergenza per le $x$ tali che $e^x$ sia minore di 1, i.e. per $x < 0$.
Inoltre, poiché (per tali $x$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^x)^n = \frac{e^x}{1-e^x},$$

la somma della serie data è $\dfrac{e^{x^2+x}}{1-e^x}$