Soluzioni primo esonero – AM2

E-mail: enrico@math.sns.it

1. (i) Diciamo che f_n converge a f uniformemente sul dominio Ω se: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$

$$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,.$$

(ii) Se $|x| > 1$, abbiamo che $|f_n(x)|$ va a $+\infty$. Poi, $f_n(1)$ è identicamente uguale a 1 e $f_n(-1)$ è alternativamente uguale a $+1$ e -1. Se $|x| < 1$, $f_n(x)$ tende a zero. Quindi f_n converge su $(-1, 1]$. Più precisamente, f_n converge a zero su $(-1, 1)$, e f_n è identicamente uguale a 1 per $x = 1$.

Inoltre, f_n converge uniformemente a zero per $|x| \leq r < 1$, infatti, se $r \in [0, 1)$:

$$\sup_{|x|\leq r} |f_n(x)| \leq r^n \longrightarrow 0 \,.$$

Infine, f_n *non* converge uniformemente in $[0, 1]$: se lo facesse, il suo limite sarebbe una funzione continua, cioè

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \,,$$

con f continua. Invece, $f(x) = 0$ per $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$.

2. (a) Se $0 < x \leq 1$, abbiamo che

$$|\sqrt{x}\, \sin x^{-2}| \leq 1 \,,$$

da cui l'integrale improprio $\int_0^1 \sqrt{x}\, \sin x^{-2}$ converge (assolutamente). Poi, essendo $|\sin t| \leq |t|$, per $x \geq 1$ abbiamo che

$$|\sqrt{x}\, \sin x^{-2}| \leq x^{-3/2} \,,$$

da cui l'integrale improprio $\int_1^\infty \sqrt{x}\,\sin x^{-2}$ converge (assolutamente).

Quindi, l'integrale improprio $\int_0^\infty \sqrt{x}\,\sin x^{-2}$ converge (assolutamente).

(b) Il denominatore dell'integrando è sempre maggiore di 1, quindi l'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\log^2 x)}$$

è ben definito. Inoltre, con la sostituzione $x = e^y$,

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(1+\log^2 x)} \le \int_e^\infty \frac{dx}{x\log^2 x} = \int_1^\infty y^{-2}\,dy\,,$$

che converge. Quindi l'integrale improprio $\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\log^2 x)}$ converge (assolutamente).

(c) Sappiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

sia quindi $\delta > 0$ tale che

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{2} \qquad \forall |x| \le \delta\,.$$

Allora,

$$\int_0^\delta \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} \le \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}}}\,,$$

che converge. Inoltre,

$$\int_\delta^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} \le \int_\delta^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\sin\delta}}\,.$$

Da ciò,

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

converge (assolutamente).

3. Sia $f(x) := \sinh x$; poichè $(e^x)' = e^x$, si ha che

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x + (-1)^{n+1}e^{-x}}{2}\,.$$

Quindi, distinguendo gli indici pari da quelli dispari,

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f^{(2k+1)}(0) = 1\,.$$

Allora, scrivendo la serie di Taylor con il resto di Lagrange, si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{f^{(2K+2)}(\xi)}{(2K+2)!}\, x^{2K+2}\,,$$

con $\xi = \xi(x)$ tale che $|\xi| \le |x|$. Sia allora $|x| \le R$: abbiamo che

$$\frac{|f^{(2K+2)}(\xi)\, x^{2K+2}|}{(2K+2)!} \le \frac{e^R R^{2K+2}}{(2K+2)!}\,,$$

che tende a zero; da cui

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

4. f_n converge su $(-\infty, 4]$. Più precisamente, f_n converge a zero su $(-\infty, 4)$ e $f_n(4)$ tende a 1. La convergenza è uniforme sugli insiemi del tipo $-\infty < x \le \alpha < 4$.

   Infatti: sia $-\infty < x \le \alpha$, con $0 < \alpha < 4$. Si ha che, per $n \ge 1$,

$$|f_n(x)| \le \frac{(2n)^\alpha}{n^4 + 9}\,,$$

   che tende a zero.

   Se invece $x \ge \beta > 4$,

$$f_n(x) \ge \frac{n^\beta}{n^4 + 11}\,,$$

   che va a $+\infty$.

   Infine, per $x = 4$, si ha che

$$f_n(x) = \frac{(1 + \frac{\log n}{n})^4}{1 + \frac{10 + \sin 4}{n^4}}\,,$$

   che tende a 1. Quindi la convergenza è uniforme in $(-\infty, 4)$, ma *non* è uniforme in $(-\infty, 4]$, dato che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ non è continua in $x = 4$.

5. La serie converge per $x \in (-1-e, -1+e)$ e la convergenza è totale (e uniforme) nei compatti contenuti in $(-1-e, -1+e)$. Infatti, il raggio di convergenza è r con

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim} \frac{\sqrt{n!}}{n}$$

e, per la Formula di Stirling,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$$

$$= \lim \sqrt[n]{\frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}}\, (2\pi n)^{n/2}\, e^{-1} =$$

$$= \lim \exp\Big(\frac{1}{n}\, \log \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}\Big)\, (2\pi n)^{n/2}\, e^{-1} =$$

$$= \exp\Big(\lim \frac{1}{n}\, \log \lim \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}\Big)\, \lim (2\pi n)^{n/2}\, e^{-1} =$$

$$= \exp(0 \cdot \log 1) e^{-1} = e^{-1}\,.$$

La serie non converge in $-1 \pm e$, in quanto il termine ennesimo di tale serie non tende a zero:

$$\lim \Big| \frac{n!\, (\pm e)^n}{n^n} \Big| = \lim \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} \cdot \lim \sqrt{2\pi n} = 1 \cdot \infty = \infty\,.$$

Si noti che abbiamo qui utilizzato il seguente fatto: se a_n tende all'infinito e $b_n \geq c > 0$ per n sufficientemente grande, allora $a_n b_n$ tende all'infinito (qui, $a_n := \sqrt{2\pi n}$ e $b_n := \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}$).