Prova scritta di AM2 dell'8/11/2002 – (I Esonero)

- **Per ottenere la sufficienza è necessario (ma non sufficiente) svolgere correttamente l'esercizio 1 e almeno una parte dell'esercizio 2.**
- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

1) (i) Dare la definizione di convergenza uniforme di una successione di funzioni.
(ii) Sia $f_n(x) = x^n$. Determinare l'insieme di convergenza di $\{f_n\}$.
Trovare intervalli chiusi su cui $\{f_n\}$ converga uniformemente.
Dire se $\{f_n\}$ converge uniformemente su $[0,1]$ (spiegando dettagliamente la risposta).

2) Studiare i seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^\infty \sqrt{x}\ \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx \ ;$$

$$\text{(b)} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x\,(1+\log^2 x)}\, dx \ ;$$

$$\text{(c)} \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{cotan} x}\, dx \ .$$

3) Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} x \ .$$

4) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ con

$$f_n(x) = \frac{(n+\log n)^x}{n^4 + 10 + \operatorname{sen} x} \ .$$

5) Si studi la convergenza puntuale, totale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\ \frac{(x+1)^n}{n^n} \ .$$

[1]Si ricorda che $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$.