# Soluzioni I

1/10/2002

Successioni e Serie di funzioni

**Esercizio 1.** (i) Considero $x \in \mathbb{R}$.
Se $x \leqslant 0$ $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim f_n(x) = 0$.
Se $x > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0$ $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim f_n(x) = 0$.
(Basta prendere $n_0 = [\frac{1}{x}]$).
(ii) Dobbiamo studiare $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1 \nrightarrow 0$. Quindi non si ha la convergenza uniforme.
(iii) $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim \int_0^1 f_n = 0$, e $\lim f_n = 0$ quindi $\int_0^1 0 = 0$, da cui la tesi.

**Esercizio 2.** Posso definire $f_n(x)$ come la funzione continua nulla al di fuori dell'intervallo $(0, \frac{1}{n})$, che per $x = \frac{1}{2n}$ vale $2n$ e negli intervalli $(0, \frac{1}{2n})$ e $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$ coincide con una retta. Si avrà dunque $f(x) = \lim f_n(x) = 0$. Allora $\int f_n = 1$ $\forall n$, mentre $\int f = 0$

**Esercizio 3.** (1) Pongo per semplicità $u_n(x) = \frac{x^{\alpha n}}{n^x}$ Distinguiamo due casi $\alpha \leqslant 0$ e $\alpha > 0$.
Per $\alpha \leqslant 0$ la serie converge puntualmente in $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Infatti in $P$ vale: $\frac{x^{\alpha n}}{n^x} < \frac{1}{n^x}$ e quindi la serie in questione converge per il criterio del confronto se $x > 1$. La serie converge totalmete negli intervalli del tipo $[r, \infty)$ con $r > 1$ infatti $u_n(x)$ è decrescente in $x$ e quindi $\sum \sup_{[r,\infty)} |u_n(x)| = \sum \frac{r^{\alpha n}}{n^r}$ che converge per $r > 1$. La serie non può convergere totalmente in $(1, \infty)$ infatti se convergesse in esso convergerebbe anche nella sua chiusura ma per $x = 1$ la serie non converge neanche puntulamente. Anche per quanto riguarda a convergenza uniforme non possiamo estenderci a $(1, \infty)$ inatti le $u_n(x)$ sono continue in $[1, \infty)$, ma per $x = 1$ la serie non converge.
Riassumendo: $P_{\alpha \leqslant 0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, $U_{\alpha \leqslant 0} = T_{\alpha \leqslant 0} = [r, \infty)$ $\forall r > 1$. Dove $P$, $U$, $T$ sono rispettivamente gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale. Per $\alpha > 0$ invece l'insieme di convergenza puntuale è $P = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$, infatti in esso $n^x > 1$ e quindi vale la stima $\frac{x^{\alpha n}}{n^x} < x^{\alpha n}$ da cui si può dedurre che la serie converge per confronto con la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha n}$. La serie converge totalmente in tutti gli insiemi della forma $[0, r]$ con $r < 1$ infatti le $u_n(x)$ in esso sono crescenti quindi $\sum \sup_{[0,r]} |u_n(x)| = \sum \frac{r^{\alpha n}}{n^r}$ che converge per $r < 1$ . Non possiamo estendere l'insieme di convergenza uniforme e totale per motivi analoghi a quelli del

caso $\alpha \leqslant 0$.
Riassumendo: $P_{\alpha>0} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$, $U_{\alpha>0} = T_{\alpha>0} = [0, r]\ \forall r < 1$.

(2) Studiamo $u_n(x) = \frac{(|x|n)^n}{|x+n!|}$ Se $x = 0$ la serie converge banalmente. Ora se prendo $n$ molto grande si ha $\frac{(|x|n)^n}{|x+n!|} \approx \frac{(|x|n)^n}{n!} \approx \frac{e^{n(\log|x|+1)}}{\sqrt{2\pi n}}$ per la formula di Stirling ($n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).
In questo caso quindi la serie converge se $\log|x| + 1 < 0 \Leftrightarrow -e^{-1} < x < e^{-1}$.
Dunque $P = (-e^{-1}, e^{-1})$, mentre $U = T = [-r, r]$ con $0 < r < e^{-1}$.

(3) Studiamo questa serie con il criterio del confronto.
$\lim_n \frac{n^x}{(\log n)^\alpha} n^{1+\epsilon} = \frac{n^{x+1+\epsilon}}{(\log n)^\alpha} \to 0 \Leftrightarrow x + 1 + \epsilon < 0 \Leftrightarrow x < -1 - \epsilon \Leftrightarrow x < -1$. Da qui possiamo anche dedurre che la serie converge totalmente e uniformemente negli intervalli del tipo $(-\infty, r]$ con $r < -1$.

(4) Essendo una serie a segni alterni ($n^x > 0$ sempre) possiamo usare il criterio di Leibnitz. Basta dimostrare quindi che $|u_n(x)| = \frac{1}{n^x} \to 0$ e questo è vero solo se $x > 0$. Se abbiamo bisogno però di convergenza assoluta dobbiamo restringerci all'insieme $(1, \infty)$. La convergenza totale si ha in tutti gli insiemi del tipo $[r, \infty)$ con $r > 1$ infatti la funzione $\frac{1}{n^x}$ è decrescente per $x > 1$. Si ha convergenza uniforme negli intervalli del tipo $[\epsilon, \infty)$ con $\epsilon > 0$ infatti: $\sup_{[\epsilon,\infty)} |\sum_{n \geqslant N} (-1)^n \frac{1}{n^x}| \leqslant \sup_{[\epsilon,\infty)} \frac{1}{N^x} = \frac{1}{N^\epsilon} \to_N 0$

(5) Anche in questo esercizio bisogna usare il criterio di Leibnitz, cioè basta dimostrare che $e^{-(\log n)^x} \to 0 \Leftrightarrow (\log n)^x \to \infty \Leftrightarrow x > 0$. Ora studiamo la convergenza assoluta: devo studiare per quali $x$ la serie $\sum_{n=2}^\infty e^{-(\log n)^x}$ converge. Se $x = 1$ $e^{-(\log n)^x} = \frac{1}{n}$ e quindi diverge. Se $0 < x < 1$ $(\log n)^x < \log n \Rightarrow e^{-(\log n)^x} > e^{-(\log n)} = \frac{1}{n}$ e quindi diverge. Ora sia $x > 1$ voglio vedere se $\exists p > 1 : e^{-(\log n)^x} < \frac{1}{n^p}$ passando ai logaritmi nell'ultima espressione otteniamo $1 < p < (\log n)^{x-1}$ e questo è vero definitivamente. Quindi non convergendo per $x = 1$ ed essendo la funzione decrescente in $x$ si ha convergenza totale negli insiemi del tipo $[r, \infty]$ con $r > 1$. Si ha convergenza uniforme in $[\epsilon, \infty)$ con $\epsilon > 0$, basta infatti osservare che $\sup_{[\epsilon,\infty)} |\sum_{n \geqslant N} (-1)^n e^{-(\log n)^x}| \leqslant \sup_{[\epsilon,\infty)} e^{-(\log N)^x} = e^{-(\log N)^\epsilon} \to_N 0$.