Soluzioni IV

22/10/2002

Serie di funzioni, Integrali impropri

Esercizio 1. Pongo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ allora per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ basta calcoalre $f(1/2)$. Si osserva subito che $f(x)$ è una serie di potenze con raggio di convergenza 1 che converge totalmente in $[-r,r]$ $\forall r : 0 < r < 1$. Ora $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 n x^{n-1} = x(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n)' = x(x(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n)')' = x(x(x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)')')' = x(x(x(\frac{x}{1-x})')')'$ allora svolgendo tutte le derivate si ottiene $f(x) = \frac{x^3+2x^2+x}{(1-x)^4}$. Possiamo calcolare dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = f(1/2) = 18$.

Esercizio 2. Pongo $f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$.
Allora $f_p(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} n x^{n-1} = x f'_{p-1}(x)$. Possiamo dunque calcolare $f_p(x)$ in modo ricorsivo (infatti $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \ldots$).

Esercizio 3. Condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum u'_n(x)$ su tutto $\mathbb{R}$ è che $u'_n(x) \to_n 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Integrando $u'_n(x)$ otteniamo $u_n(x) + c$. Quindi basta prendere $c = 1$ e $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Si vede facilmente che $u'_n(x)$ converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ma $u_n(x) = \frac{x^n}{n!} + 1$ non converge neanche puntualmente.

Esercizio 4. Si ha $\sum \sup_{\mathbb{R}} |\frac{\sin nx}{n!}| = \sum \frac{1}{n!} = e < \infty$ e dunque la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$. Ricordando che $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ si ha che $\sin nx$ è la parte immaginaria di e^{inx}, e perciò la serie in questione è la parte immaginaria della serie $\sum \frac{e^{inx}}{n!} = e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} e^{i \sin x} = e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i \sin(\sin x))$. Dunque $\sum \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} \sin(\sin x)$.

Esercizio 5. La successione $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ è definita solo nell'insieme $P = x \in \mathbb{R} : x \neq -k, k \in \mathbb{N}$ dove converge puntualmente. Nell'insieme E si ha convergenza totale infatti in esso $|u_n(x)| \leq \frac{(n+1)^6}{n!}$.

Esercizio 6. Notiamo che la funzione integranda non è definita in 0 e in 1, infatti in 0 una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. mentree in 1 la funzione integranda tende a ∞. Osserviamo che in un intorno di 1 la funzione $(x^x - 1)^2 = (e^{x\log x} - 1)^2$ è sviluppabile in serie di Taylor come $(xlogx)^2$. Dunque studiamo per ora solo $\int_r^1 \frac{x}{(x^x-1)^2}\,dx$ dove $r : 0 < r < 1$ è molto vicino ad 1. $\int_r^1 \frac{x}{(x^x-1)^2}\,dx \approx \int_r^1 \frac{x}{x^2\log^2 x}\,dx = \int_r^1 \frac{1}{x\log^2 x}\,dx$ e ponendo $y = \log x$ otteniamo che $\int_r^1 \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \int_{\log r}^0 \frac{1}{y^2}\,dy$ che diverge. Quindi l'integrale $\int_0^1 \frac{x}{(x^x-1)^2}\,dx$ diverge.

Esercizio 7. Per le soluzioni a questo esercizio consultare Giusti, Esercizi e Complementi di Analisi Matematica (Vol. 1), Bollati Boringhieri pag. 212 es. 5.