Soluzioni V

19/11/2002

Potenze e Logaritmi Complessi

Esercizio 1. Ricordiamo che $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Sia quindi $z = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi \Rightarrow e^{-\frac{\pi i}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$, $e^{\frac{3}{4}\pi i} = \cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. L'esercizio chiede di calcolare il logaritmo complesso di $2, -1, i, -i/2, -1-i, 1+2i$. Dove $\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \log_* |z| + iy + i2\pi\mathbb{Z}$ se $z = |z|e^{iy}$ con $y \in [0, 2\pi)$, $y = \arg z$ (y è l'angolo sotteso dal vettore z nel piano complesso con la parte positiva dell'asse $\mathbb{R}$) e $\log_*$ è il logaritmo reale. Dunque calcoliamo

$$\log 2 = \log_* 2 + i0 + i2\pi\mathbb{Z} = \log_* 2 + i2\pi\mathbb{Z};$$

$$\log -1 = \log_* 1 + i\pi + i2\pi\mathbb{Z} = i\pi + i2\pi\mathbb{Z};$$

$$\log i = \log_* 1 + i\pi/2 + i2\pi\mathbb{Z} = i\pi/2 + i2\pi\mathbb{Z};$$

$$\log -i/2 = \log_*(1/2) - i\pi/2 + i2\pi\mathbb{Z};$$

$$\log(-1-i) = \log_* \sqrt{2} + i5/4\pi + i2\pi\mathbb{Z};$$

$$\log(1+2i) = \log_* \sqrt{3} + i(\arctan_* 2) + i2\pi\mathbb{Z};$$

(abbiamo indicato con $\arctan_*$ la funzione reale arcotangente).

Esercizio 3. Pongo $z = x + iy$ con $y \in [0, 2\pi)$ allora $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ e sfruttando sempre il "teorema di addizione" per la funzione exp si ha che $\exp(e^z) = \exp(e^x \cos y)\exp(ie^x \sin y) =$

$$\exp(e^x \cos y)[\cos(e^x \sin y) + i\sin(e^x \sin y)].$$

Dunque la parte reale è $\exp(e^x \cos y)\cos(e^x \sin y)$ mentre la parte immaginaria è $\exp(e^x \cos y)\sin(e^x \sin y)$.

Esercizio 4. Definiamo $a^b = \{z = \exp(bw),\ \text{con}\ w \in \log a\}$ se $a, b \in \mathbb{C}$. Allora

$$2^i = \exp(i \log 2) = \exp(i(\log_* 2) + 2\pi\mathbb{Z});$$
$$i^i = \exp(i(i\pi/2 + i2\pi\mathbb{Z})) = \exp(-\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}));$$
$$(-1)^{2i} = \exp(2i(i\pi + i2\pi\mathbb{Z})) = \exp(-2\pi + 4\pi\mathbb{Z})).$$

Esercizio 5. Scrivo z in forma polare: $z = |z|e^{i\theta}$, dunque $\log z = \log_* |z| + i\theta + i2\pi\mathbb{Z}$.
Allora $z^z = e^{z \log z} = e^{|z|e^{i\theta}(\log_* |z| + i\theta + i2\pi\mathbb{Z})} = e^{|z|[\cos\theta + i\sin\theta]\log_* |z|}\, e^{i\theta|z|[\cos\theta + i\sin\theta]}$ $e^{i2\pi\mathbb{Z}|z|[\cos\theta + i\sin\theta]} = Be^{iA}$ con $A := |z|(\log_* |z| \sin\theta + \theta\cos\theta + (\cos\theta)2\pi\mathbb{Z})$ e $B := e^{|z|(\log_* |z| \cos\theta - \theta\sin\theta - 2\pi\mathbb{Z}\sin\theta)}$. Quindi la parte reale di z^z è $B\cos A$ mentre la parte immaginaria è $B\sin A$.

Esercizio 6. Definiamo $\arctan w = \{z \in \mathbb{C} : \tan z = w\}$ Calcoliamo questo insieme sfruttando le relazioni che ci sono tra il coseno, il seno e l'esponenziale complessi. $z \in \arctan w \Leftrightarrow \tan z = w \Leftrightarrow \frac{\sin z}{\cos z} = w \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = w \Leftrightarrow e^{2iz} - 1 = iw(e^{2iz} + 1) \Leftrightarrow e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} = \frac{i-w}{i+w} \Leftrightarrow z \in -i/2 \log \frac{i-w}{i+w} \Rightarrow \arctan w = -i/2 \log \frac{i-w}{i+w}$, dove l'ultima ugualianza è un'ugualianza tra insiemi. Notiamo che l'arcotangente complessa ad ogni valore restituisce un insieme di valori, essendo una funzione del logaritmo complesso. Anche l'arcotangente reale è una funzione a più valori, infatti ci sono infiniti angoli che hanno la stessa tangente, ma in genere si considera un solo ramo di $\arctan_* x$ (quello che restituisce valori tra $-\pi/2$ e $\pi/2$) per avere una funzione ad un valore.

Esercizio 7. Ricordando che $\sin y$ e $\cos y$ sono funzioni periodiche di periodo 2π.
Studiamo $\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$ considerando i resti R_n con $n \geqslant 1$.
$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = (-1)^n[(\frac{y^{2n}}{(2n)!} - \frac{y^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}) + (\frac{y^{2(n+2)}}{(2(n+2))!} - \frac{y^{2(n+3)}}{(2(n+3))!}) + \ldots]$.
Sia $y \in [0, 2\pi]$, mostriamo che ogni termine della forma $(\frac{y^{2k}}{(2k)!} - \frac{y^{2(k+1)}}{(2(k+1))!})$ è positivo, da questo segue immediatamente la tesi. $(\frac{y^{2k}}{(2k)!} - \frac{y^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}) = \frac{y^{2k}}{(2k)!}(1 - \frac{y^2}{(2(k+1))!(2k)!}) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant \sqrt{(2(k+1))!(2k)!}$ e questo è vero per ogni $k > 0$ se $2\pi < \sqrt{(2(k+1))!(2k)!} \Leftrightarrow 2\pi < \sqrt{48} \Leftrightarrow \pi/2 < \sqrt{3}$. Verifichiamo quindi che $\cos\sqrt{3} < 0$ (questo implicherebbe che $\pi/2 < \sqrt{3}$, infatti $\pi/2$ è il primo zero positivo del coseno e $\cos x > 0$ se $x \in [0, \pi/2]$). Consideriamo

la succesione $\frac{(\sqrt{3})^{2k}}{(2k)!} = \frac{3^k}{(2k)!}$ e cerchiamo per quali k diventa strettamente decrescente. $\frac{3^k}{(2k)!} > \frac{3^{k+1}}{(2(k+1))!} \Leftrightarrow 3 < \frac{(2(k+1))!}{(2k)!} \Leftrightarrow 3 < (2k+2)(2k+1) \Leftrightarrow k \geqslant 1$. Quindi $\cos\sqrt{3} = 1-3/2-9/4-(\frac{3^6}{6!}-\frac{3^8}{8!})-(\ldots)\ldots < -11/4 < 0$. La tesi segue dal fatto che $R_n(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!} \geqslant 0$ cioè R_n e il suo primo termine sono concordi. Per quanto riguarda $\sin y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$ il discorso è anologo: infatti consideriamo $R_n(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = +\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}y[(\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}-\frac{y^{2(n+1)}}{(2(n+1)+1)!})+\ldots]$. E, come prima, ogni termine del tipo $\frac{y^{2k}}{(2k+1)!}-\frac{y^{2(k+1)}}{(2(k+1)+1)!}$ è positivo, infatti possiamo riscriverlo come $\frac{y^{2k}}{(2k+1)!}(1-\frac{y^2}{(2k+1)!(2(k+1)+1)!}) > 0 \Leftrightarrow y < \sqrt{(2k+1)!(2k+3)!}$ e questo è vero $\forall k > 0$ se $y \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 8. Dimostro che $3/2 < \pi/2 < \sqrt{3}$. Considero $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+R_4$ e $R_4 > 0$ per l'esercizio precedente. Dunque $\forall x$ si ha $\cos x > a(x^2)$, dove $a(y) := 1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{24}-\frac{y^3}{720}$. Studiando la derivata prima di $a(y)$ si scopre che a è strettamente decrescente quindi se $x \in [0, 3/2]$ $\cos x > a(x^2) > a(9/4) > 0.07$. Quindi $3/2 < \pi/2$. (Notiamo che non bastava osservare che $\cos 3/2 > 0$ infatti dobbiamo anche dimostrare che non ci sono altri zeri in $[0, 3/2]$). Abbiamo già provato nell'esercizio precedente che $\pi/2 < \sqrt{3}$.