Soluzioni VIII

10/12/2002

Derivabilità

Esercizio 1. (i) Pongo $g(t) := \frac{\log 1+|t|}{|t|}$, sappiamo che $\lim_{t\to 0} g(t) = 1$ quindi possiamo scrivere $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{|(x,y)|\to 0} g(|(x,y)|) = 1 = f(0,0)$. La funzione è perciò continua nell'origine. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{x}{1+|(x,y)|} - \frac{x}{|(x,y)|}\log(1+|(x,y)|)}{|(x,y)|^2} = \frac{x}{|(x,y)|^2}\left(\frac{1}{1+|(x,y)|} - \frac{\log(1+|(x,y)|)}{|(x,y)|}\right)$. Torniamo, per ora, alla funzione $g(t)$ e consideriamo

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\log 1+|t|}{|t|} - 1}{t}.$$

Questo limite non esiste: infatti per $t \to 0^+$ vale 1 mentre per $t \to 0^-$ vale -1. Cerchiamo le derivate direzionali nell'origine, sia quindi $\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| = 1$ una direzione:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\xi_1, t\xi_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t}.$$

Abbiamo già osservato che questo limite non esiste quindi non esistono le derivate direzionali nell'origine. Dunque la funzione nell'origine non è differenziabile, ma solo continua.

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è C^∞. Infatti in questo insieme possiamo derivare la funzione un qualunque numero di volte rispetto ad x (per esempio) e ottenere una funzione continua che possiamo derivare un qualunque numero di volte rispetto a y ed ottenere ancora una funzione continua. (ii) Studiamo la funzione $\log(1+t)$ con $0 < t < 1$. Si ha, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin,

$$\log(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{t^k}{k} = t - t^2/2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{2k+2}}{2k+2}\right).$$

Ora se $0 < t < 1$ ogni differenza all'interno della sommatoria è positiva infatti: $\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{2k+2}}{2k+2} > 0 \Leftrightarrow t < \frac{2k+2}{2k+1}$, ma $t < 1 < \frac{2k+2}{2k+1}$. Quindi $\log(1+t) > t - t^2/2$ e, ricordando che $\log(1+t)$ è concava, si ha $\log(1+t) < t$ essendo t tangente in 0 alla funzione $\log(1+t)$. Quindi se $0 < t < 1$ si ha

$$\left|\frac{\log(1+t)}{t} - 1\right| = 1 - \frac{\log(1+t)}{t} < t/2.$$

Torniamo quindi alla funzione $f(x,y)$. Se $|(x,y)| < \delta$ allora $|f(x,y) - 1| = |\frac{\log(1+|(x,y)|)}{|(x,y)|} - 1| < |(x,y)|/2 < \delta/2 = 1/10$. Pongo quindi $\delta = 1/5$, osserviamo anche che $1/5 < 1$, altrimenti non avremmo potuto applicare le disuguaglianze usate.

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin(1/x)+y^2\cos(1/y), & \text{se } x\neq 0 \text{ e } y\neq 0,\\ y^2\cos(1/y), & \text{se } x=0 \text{ e } y\neq 0,\\ x^2\sin(1/x), & \text{se } x\neq 0 \text{ e } y=0,\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Nei punti tali che $x\neq 0$ e $y\neq 0$ le funzioni sono continue essendo somma, prodotto e composizione di funzioni continue. Calcoliamo le derivate parziali in questi punti: $\nabla f=(2x\sin(1/x)-\cos(1/x), 2y\cos(1/y)+\sin(1/y))$. Osserviamo che le derivate parziali esistono e sono continue, quindi la funzione è almeno $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$.
Vediamo che succede se ci avviciniamo agli assi: prendiamo per esempio l'asse $x=0$. Prendiamo in considerazione il punto $(0,y_0)$ e studiamo la continuità. Sia $|(x,y)-(0,y_0)|<\delta$. Ci sono dunque due casi: $x\neq 0$ e $x=0$; nel primo si ha $|f(x,y)-f(0,y_0)|=|x^2\sin(1/x)+y^2\cos(1/y)-y_0^2\cos(1/y_0)|=|x^2\sin(1/x)+y^2\cos(1/y)-y_0^2\cos(1/y)+y_0^2\cos(1/y)-y_0^2\cos(1/y_0)|$.
Ora applicheremo la disugualianza triangolare, prima però facciamo alcune considerazioni. Se $|x|<\delta$ e $x\neq 0$ allora $|x^2\sin(1/x)|\leqslant|x^2|<\delta^2$, $|\cos t-\cos t_0|\leqslant|t-t_0|$ e $|\sin t-\sin t_0|\leqslant|t-t_0|$ (dal Teorema di Lagrange).
Quindi $|f(x,y)-f(0,y_0)|\leqslant|x^2\sin(1/x)|+|y^2\cos(1/y)-y_0^2\cos(1/y)|+|y_0^2\cos(1/y)-y_0^2\cos(1/y_0)|\leqslant\delta^2+|y^2-y_0^2|+y_0^2|\frac{y-y_0}{yy_0}|$. Se per esempio $\delta<\min\{1,|y_0|/2\}$ allora $|y_0+y|<|y_0|+1$ e $|yy_0|>|y_0^2/2|$. Allora $|f(x,y)-f(0,y_0)|<\delta^2+(|y_0|+1+2/|y_0|^2)\delta<(|y_0|+2+2/|y_0|^2)\delta:=c_1\delta=\epsilon$. Se invece fosse stato $x=0$ allora $|f(0,y)-f(0,y_0)|=|y^2\cos(1/y_0)-y^2\cos(1/y_0)|<(|y_0|+1+2/|y_0|^2)\delta:=c_2\delta=\epsilon$ per quanto visto primo se $\delta<\min\{1,|y_0|/2\}$ Pongo $\delta=\min\{\epsilon/c_1,\epsilon/c_2,1,|y_0|/2\}$, ma visto che $c_1=c_2+1$ e $c_2>0$ allora $c_1>c_2$ e $\delta=\min\{\epsilon/c_1,1,|y_0|/2\}$. Abbiamo verificato così la continuità nei punti $(0,y_0)$ con $y_0\neq 0$
Nei punti del tipo $(x_0,0)$ con $x_0\neq 0$ il discorso è del tutto anologo, e quindi anche in essi la funzione è continua. Più semplice è lo studio nell'origine. Nel caso più scomodo in cui $x\neq 0$ e $y\neq 0$ si ha $|f(x,y)-f(0,0)|=|x^2\sin(1/x)+y^2\cos(1/y)|\leqslant|x^2\sin(1/x)|+|y^2\cos(1/y)|<2\delta^2=\epsilon$. E' quindi evidente che la funzione è continua anche nell'origine. Riassumendo $f(x,y)$ è continua su $\mathbb{R}^2$. Vediamo se esistono le direvate direzionali nei punti $(0,y)$, $(x,0)$ e $(0,0)$. Sia $\xi\in\mathbb{R}^2:|\xi|=1$ una direzione, svolgendo i limiti in tutti i casi si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}(0,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\xi_1,y+t\xi_2)-f(0,y)}{t}=2\xi_2 y\cos(1/y)+\xi_2\sin(1/y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}(x,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\xi_1,t\xi_2)-f(x,0)}{t}=-\xi_1\cos(1/x)+2x\xi_1\sin(1/x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\xi_1, t\xi_2) - f(0,0)}{t} = 0,$$

quindi si ha:

$$\nabla f(x,y) = (2x\sin(1/x) - \cos(1/x), 2y\cos(1/y) + \sin(1/y)),$$

$$\nabla f(0,y) = (0, 2y\cos(1/y) + \sin(1/y)),$$

$$\nabla f(x,0) = (-\cos(1/x) + 2x\sin(1/x)),$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0),$$

dove $x, y \neq 0$. Abbiamo quindi scoperto che le derivate direzionali esistono sempre, ma non sono continue: infatti, per esempio, non esiste il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ mentre $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$. Quindi la funzione non è $C^1(0,y)$, ragionando analogamente in $(0,x)$ e $(0,0)$. Per la differenziabilità, prendiamo in considerazione prima i punti della forma $(0,y)$ con $y \neq 0$:

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(h_1, y+h_2) - f(0,y) - \nabla f(0,y)h|}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{O(h_1^2) + O(h_2^2)}{|h|} = 0$$

(abbiamo ottenuto questo risultato dopo alcuni passaggi e sfruttando il polinomio di Taylor per approsimare $\cos(\frac{1}{y+h_2})$ in $h_2 = 0$). Per quanto riguarda il punto $(0,x)$ il discorso è analogo.
Nell'origine si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)h|}{|h|} &= \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1^2 \sin(1/h_1) + h_2^2 \cos(1/h_2)|}{|h|} \\
&\leqslant \lim_{|h|\to 0} \frac{O(h_1^2) + O(h_2^2)}{|h|} = 0,
\end{aligned}$$

se $(h_1, h_2) \neq (0,0)$, negli altri casi il cacolo è analogo. Da cui si deduce che la funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Riassumendo $f(x,y)$ è continua e differenziabile sugli assi ma non C^1.
In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la funzione è C^∞. Infatti prediamo k, devo dimostrare che $\forall p \leqslant k$ $\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ esiste ed è continua per ogni α e β tali che $\alpha + \beta = p$. Ma la funzione è C^∞ su x se $x \neq 0$, quindi $\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}$ esiste ed è continua, e pensata come funzione di y è C^∞ se $y \neq 0$, infatti è composizione, somma e prodotto di seno,coseno e polinomi che sono C^∞ rispetto alla y.
(Ricordiamo che si dice che $f(x) = O(x^n)$ se esiste M tale che $\lim_{x\to 0} |\frac{f(x)}{x^n}| \leqslant M$).

Esercizio 3. (i) La funzione è positivamente omogenea di grado $\alpha+1$ infatti $f(tx,ty) = tx|(tx,ty)|^\alpha = t^{\alpha+1}x|(x,y)|^\alpha$. Quindi essendo continua per $(x,y) \neq (0,0)$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha+1>0$ quindi se $\alpha > -1$.
(ii) Calcoliamo f_x. Per quanto visto nel settimo Tutorato $\frac{\partial}{\partial x}|(x,y)|^\alpha = \alpha x|(x,y)|^{\alpha-2}$.
Quindi se $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = x|(x,y)|^{2p-3}(2p|(x,y)|\sin(|(x,y)|^{-1}) - \cos(|(x,y)|^{-1})),$$

dopo un pò di passaggi. Mentre

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|^{2p}}{t}\sin(1/|t|).$$

Questo limite esiste se $2p-1>0$ e in tal caso vale 0. Quindi la condizione necessaria per l'esistenza di $f_x(0,0)$ è $p>1/2$. Per quanto riguarda la continuità vogliamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 0.$$

Possiamo dunque scrivere $f_x(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ dove $g(x,y) = x|(x,y)|^{2p-3}$ e $h(x,y) = 2p|(x,y)|\sin(|(x,y)|^{-1}) - \cos(|(x,y)|^{-1})$. Ora per $(x,y)\to(0,0)$ la funzione h non ha limite ma rimane limitata, quindi l'unica speranza per avere la continuità è che $g(x,y)$ tenda a 0 per $(x,y)\to(0,0)$ e questo è vero se e solo se $2p-3>-1$ per quanto visto nel primo punto. Quindi riassumendo $f_x(x,y)$ esiste ed è continua nell'origine se e solo se $p>1$.

Esercizio 4. La funzione è continua su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ infatti è composizione e prodotto di funzioni continue. Vediamo la continuità nell'origine. $|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}$. Quest'ultima funzione è positivamente omogenea di grado 1 quindi $\forall\epsilon\ \exists\delta>0$ tale che $|f(x,y)-f(0,0)| \leqslant \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} < \epsilon$ se $|(x,y)|<\delta$. La funzione è quindi estendibile nell'origine ad una funzione continua con $f(0,0)=0$. Calcoliamo, se esistono le derivate direzionali nell'origine:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\xi_1,t\xi_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^3(\xi_1^3+\xi_2^3))}{t^3} = \xi_1^3+\xi_2^3.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,1)$. Ora vediamo se la funzione è differenziable:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)h|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{|\frac{\sin(h_1^3+h_2^3)}{|h|^2} - h_1 - h_2|}{|h|}.$$

Se scelgo la successione $(1/n, 1/n) \to_n 0$ abbiamo che il limite è $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. Riassumendo la funzione nell'origine è continua e ammette tutte le derivate direzionali ma non è differenziabile. In

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Big(\{x=0\} \cup \{y=0\}\Big)$$

la funzione è C^∞, infatti è derivabile infinite volte rispetto alla x e ogni derivata rispetto a x è derivabile infinite volte rispetto alla y, essendo composizione, somma prodotto di funzioni C^∞.