Soluzioni IX

17/12/2002

Taylor, Massimi e Minimi

Esercizio 1. Osserviamo innanzitutto che la funzione $f(x,y) = (2x+y)e^{x^2-y^2}$ è continua essendo composizione, prodotto, somma di funzioni continue. Ora prima di calcolare il polinomio di Taylor facciamo una banale considerazione che ci sarà utile più volte in seguito: sia $F(t) = kg(t)e^{f(t)}$ con g e f funzioni reali di variabile reale derivabile per ogni t allora $F'(t) = kg'(t)e^{f(t)} + kg(t)f'(t)e^{f(t)} = ke^{f(t)}[g'(t) + g(t)f'(t)]$.
Calcoliamo dunque le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2}(1 + 2x + xy),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(1 - 2y^2 - 4xy).$$

Queste funzioni sono continue in $\mathbb{R}^2$ e in particolare in (0,0) quindi:

$$\nabla f(0,0) = (2,1).$$

Ora passiamo alle derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}[4x + y + 4x^3 + 2x^2 y],$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2e^{x^2-y^2}[y + 4x^2 y + 2xy^2],$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^2-y^2}[2x + 3y - 2y^2 - 4xy^2].$$

Queste funzioni sono tutte continue e si annullano nell'origine. La funzione f avendo tutte le derivate parziali continue fino al secondo ordine è dunque una funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$. Allora possiamo scrivere la matrice Hessiana H calcolata nell'origine:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi sia $P_2(x,y)$ il polinomio di Taylor di grado 2 nell'origine calcolato nel punto (x,y) della funzione $f(x,y)$.
Sarà quindi

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + y.$$

Esercizio 2. Sia $D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 \leqslant 3\}$ e sia $\overset{\circ}{D}$ l'interno di D, ovvero il più grande aperto contenuto in D. Allora, osserviamo che D è chiuso e limitato, quindi compatto. Per studiare massimi e minimi di f in D dobbiamo studiare f sia in $\overset{\circ}{D}$ sia sulla frontiera ∂D. Consideriamo, per il momento, $\overset{\circ}{D}$ e osserviamo che $\nabla f(x,y) = (y,x)$ si annulla solo nell'origine. Ora calcoliamo la matrice Hessiana H:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di H è negativo quindi il punto (0,0) è un punto di flesso. Dobbiamo cercare il massimo e il minimo di f su $\partial D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 = 3\}$. Osserviamo che f si annulla sugli assi ed è positiva nel primo e nel terzo quadrante mentre è negativa nel secondo e nel quarto. Inoltre f è dispari rispetto ad entrambe le variabili: $f(-x,y) = -f(x,y)$ e $f(x,-y) = -f(x,y)$. Basta quindi studiare f solo nel primo quadrante dove $\partial D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ e } x + y^2 = 3\}$. Perciò f su questa curva diventa una funzione di un unica variabile $g(y) := y(3 - y^2)$. Ora $g'(y) = 3(1 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 1$ e in tal caso $x = 2$. E $g''(y) = -6y$ quindi il punto (2,1) è un punto di massimo per la funzione $f(x,y)$.
Per la simmetria di f abbiamo due punti di massimo (1,2) e (-1,-2) nei quali la funzione f vale 2, e due punti di minimo (-1,2) e (1,-2) dove la funzione vale -2.

Esercizio 3. Come nell' esercizio precedente studiamo f nell'interno del dominio D e sulla frontiera, ma $f(x,y) = xy^2(x + y - 1)$ si annulla sugli assi e sulla frontiera di D dove $x + y = 1$. Consideriamo ora $D_1 = \{(x,y) \in \overset{\circ}{D}: x > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \overset{\circ}{D}: x < 0\}$. Sia $(x,y) \in D_1$ allora $f(x,y) \geqslant 0$ e $f(x,y) = 0$ se e solo se $y = 0$. Mentre se $(x,y) \in D_2$ allora $f(x,y) < 0$. Ora

$$\inf_{\overset{\circ}{D}} f = -\infty \qquad \sup_{\overset{\circ}{D}} f = \infty,$$

infatti se considero le due succesioni $a_n = (-1, n)$ e $b_n = (n, 1)$ allora $a_n, b_n \in \overset{\circ}{D}$ se $n > 1$, e $\lim_n f(a_n) = -\infty$ e $\lim_n f(b_n) = \infty$.
Consideriamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \big(y^2(2x + y - 1), xy(3y + 2x - 2)\big),$$

si annulla in $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, che non appartengono a $\overset{\circ}{D}$, e in tutti i punti della forma $(x,0)$ con $x > 1$. Nei punti della forma $(x,0)$ con $x > 1$ la funzione è nulla ma in un qualunque intorno di essi f è maggiore o uguale a 0 quindi sono tutti punti di minimo relativo. Abbiamo già osservato che sulla frontiera la funzione è nulla. Ci sono ora tre casi da considerare sulla frontiera $\partial D = \{(x, 1-x) : con x \in \mathbb{R}\}$: $x > 0$ $x = 0$ $x < 0$. Nel primo caso la funzione in un intorno di essi è positiva, quindi abbiamo dei punti di minimo relativo. Se invece $x < 0$ la funzione risulta negativa in un intorno e quindi abbiamo dei punti di massimo relativo. Per quanto riguarda il caso $x = 0$, rappresentato dal punto (0,1), dobbiamo fare un discorso a parte: infatti prendendo qualsiasi intorno del punto (0,1) la funzione assume valori positivi e negativi, quindi questo è un punto di flesso.

Esercizio 4. La funzione f è continua essendo composizione di funzioni continue. Risulta dalla definizione che $f(x,y) \geqslant 1$ e $f(x,y) = 1$ se $x+y \leqslant 1$. Quindi

$$f(x,y) > 1 \Leftrightarrow (x,y) \in D_1 = \left\{(x,y) \in D : 0 \leqslant x \leqslant 1, 1-x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

In $D \setminus D_1$ la funzione assume il suo minimo e vale 1. In $\overset{\circ}{D}_1$ si ha che $\nabla f(x,y) = (1,1)$ da cui deduciamo che il gradiente non si annulla in alcun punto. Studiamo quindi la funzione sulla curva

$$\Gamma = \{(x,y) : x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \text{con } 0 < \theta < \pi/2\},$$

che rappresenta ciò che rimane da studiare della frontiera di D (altrove vale 1).
Se $(x,y) \in \Gamma$ possiamo scrivere $f(x,y) = g(\theta) := \cos\theta + \sin\theta$. Studiamo quindi la funzione g: $g'(\theta) = -\sin\theta + \cos\theta$ e $g''(\theta) = -\cos\theta - \sin\theta$. La funzione g' si annulla su Γ se $\theta = \frac{\pi}{4}$ e in questo punto $g'' < 0$ quindi abbiamo un punto di massimo per g nel punto $\theta = \frac{\pi}{4}$ dove la funzione vale $\sqrt{2}$. Ritornando alle coordinate (x,y) abbiamo un punto di massimo assoluto della funzione f su D nel punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.