Tutorato I

1/10/2002

Succesioni e Serie di funzioni

Esercizio 1. Sia f_n la funzione continua che vale 0 se $x \notin (0, \frac{1}{n})$, per $x = \frac{1}{2n}$ vale 1 e coincide con una retta negli intervalli $(0, \frac{1}{2n})$ e $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$.
Dimostrare le seguenti affermazioni:
(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni x;
(ii) f_n non converge uniformemente su $[0,1]$;
(iii) $\lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim f_n = 0$.

Esercizio 2. Trovare una successione di funzioni continue $f_n \in C([0,1])$ convergente puntualmente ad una funzine continua $f \in C([0,1])$ ma tale che $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$.

Esercizio 3. Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni di x, (ossia si trovino i più grandi insiemi dove le serie convergono puntualmente, uniformente e totalmente) al variare, qualora appaia, del parametro α:
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n}}{n^x}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{x+n!}$,
(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^x}{(\log n)^\alpha}$,
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$,
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(\log n)^x}$,