

Tutorato III

15/10/2002

Integrali impropri, Successioni di funzioni

Esercizio 1. Dimostrare che, se $f(x)$ è una funzione decrescente e di classe C^1 , e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, allora l'integrale

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin x \, dx$$

è convergente.

Esercizio 2. Dire se esistono i seguenti integrali impropri, e quando è possibile scrivere esplicitamente la soluzione:

(1)

$$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{|x| - \sin x} \, dx$$

(2)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} \, dx$$

(3)

$$\int_1^{\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) \, dx$$

(4)

$$\int_0^1 x^{\ln x} \, dx$$

(5)

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$$

Esercizio 3. Per ognuna delle successioni che seguono trovare l'insieme E in cui si ha convergenza puntuale, e il limite relativo. Dire se la convergenza è uniforme (a) su E , (b) sull'insieme (o gli insiemi) indicati a fianco di ognuna.

(1)
$$\frac{1 + x^n}{n + x^{2n}}, [1, \infty)$$

(2)
$$\frac{1 + x^{2n}}{n^2 + x^{2n}}, [-1, 1]$$

(3)
$$n^{n^x}, (-\infty, -1], [-1, 0]$$