Tutorato IV

22/10/2002

Serie di funzioni, Integrali impropri

Esercizio 1. Usando le proprietà di derivazione delle serie uniformemente convergenti, si calcoli il valore delle seguenti serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

Esercizio 2. Trovare delle formule ricorsive per calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n.$$

Esercizio 3. Si dia un esempio di una serie di funzione C^∞ tale che $\sum u_n'$ converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ma tale che $\sum u_n(x)$ non converge per nessun $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si dimostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ converge totalmente in $\mathbb{R}$, e si calcoli la sua somma.

Esercizio 5. Trovare l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, e dimostrare che essa converge uniformemente nell'insieme

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{(n+1)^6}, 1 - n - \frac{1}{(n+1)^6} \right].$$

Esercizio 6. Dire se esiste il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^x - 1)^2} \, dx.$$

Esercizio 7. Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo T e limitata. Dimostrare che, se $\alpha \leq 1$, la funzione $x^{-\alpha} f(x)$ non è integrabile in (T, ∞), a meno che non sia

$$\int_0^T f(x)\, dx = 0,$$

nel qual caso $x^{-\alpha} f(x)$è integrabile per ogni $\alpha > 0$.