Tutorato VII

3/12/2002

Differenziabilità

Esercizio 1. Calcolare $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:
(i) f sia continua nell'origine;
(ii) f abbia derivate direzionali nell'origine;
(iii) f sia differenziabile nell'origine.

Esercizio 3. Per $x \in \mathbb{R}^2$, sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

(i) Dimostrare che $f \in C(\mathbb{R}^3)$ e discutere la differenziabilità di f;
(ii) Trovare un numero positivo δ per il quale se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < 1/100$, con x_0 tale che $|x_0| = 1$;
(iii) f è differenziabile nel punto $(\sqrt{2}, 1)$?

Esercizio 4. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} y e^{-(\frac{y}{x-1})^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(i) Studiare la continuità e regolarità di f in $(1, 0)$;
(ii) Trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 1/100$ per $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ con $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e (qualora f fosse continua in $(1, 0)$) con $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Esercizio 5. Studiare la regolarità di

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$