Tutorato VIII

10/12/2002

Derivabilità

Esercizio 1. Sia

$$f(x,y) \equiv \begin{cases} \frac{\log(1+|(x,y)|)}{|(x,y)|}, & \text{se } |(x,y)| \neq 0, \\ 1, & \text{se } |(x,y)| = 0. \end{cases}$$

(i) Discutere la regolarità di f in $x = 0$ (continuità, derivabilità etc.).
(ii) Trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x,y) - 1| < 1/10$ per $|(x,y)| < \delta$.

Esercizio 2. Siano

$$s(t) \equiv \begin{cases} \sin(1/t), & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases} \qquad c(t) \equiv \begin{cases} \cos(1/t), & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

e sia $f(x,y) = x^2 s(x) + y^2 c(y)$. Discutere la regolarità di f (continuità, differenziabilità, etc.).

Esercizio 3. (i) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità della funzione $f(x,y) = x|(x,y)|^\alpha$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f(0,0) = 0$.
(ii) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} |(x,y)|^{2p} \sin(|(x,y)|^{-1}), & \text{se } |(x,y)| \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si dica per quali p f_x esiste ed è continua.

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1} \sin(x^3 + y^3), & \text{se } |(x,y)| \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si studi la regolarità di f in $\mathbb{R}^2$ (continuità, differenziabilità, etc.).