6 Il teorema del differenziale ed il lemma di Schwarz

Teorema 1 ("del differenziale totale") *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f \in C(A, \mathbb{R})$. Supponiamo che esistano le derivate parziali f_x e f_y in A e che siano continue nel punto $u_0 = (x_0, y_0) \in A$. Allora f è differenziabile in u_0.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi segue che esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(u_0) \subset A$ e per ogni $u \in B_\delta(u_0)$

$$|f_x(u) - f_x(u_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f_y(u) - f_y(u_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.1}$$

Per ogni $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ tali che $u_0 + (\xi, \eta) \in B_\delta(u_0)$, si ha:

$$\begin{aligned} & |f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(u_0) - f_x(u_0)\xi - f_y(u_0)\eta| \\ = \; & |f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0 + \xi, y_0) + f(x_0 + \xi, y_0) - f(u_0) - f_x(u_0)\xi - f_y(u_0)\eta| . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Applicando due volte il teorema del valor medio (per funzioni di una variabile) ed usando (6.2) e (6.1) segue che esistono due numeri $t_i \in (0, 1)$ tali che

$$\begin{aligned} & |f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(u_0) - f_x(u_0)\xi - f_y(u_0)\eta| \\ = \; & |f_y(x_0 + \xi, y_0 + t_1\eta)\eta + f_x(x_0 + t_2\xi, y_0)\xi - f_x(u_0)\xi - f_y(u_0)\eta| \\ \leq \; & |f_y(x_0 + \xi, y_0 + t_1\eta) - f_y(u_0)| \, |\eta| + |f_x(x_0 + t_2\xi, y_0) - f_x(u_0)| \, \xi| \\ \leq \; & \frac{\varepsilon}{2}|\eta| + \frac{\varepsilon}{2}|\xi| \leq \varepsilon|(\xi, \eta)| , \end{aligned}$$

il che significa che f è differenziabile in u_0. ∎

Il prossimo teorema (il cosiddetto "lemma di Schwarz") dà condizioni sufficienti per scambiare l'ordine di derivazione in funzioni di più variabili.

Teorema 2 (Lemma di Schwarz) *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione tale che f_x, f_y e $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}$ esistano in ogni punto di A con $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}$ continua in $u_0 \in A$. Allora esiste $\dfrac{\partial f_y}{\partial x}(u_0)$ e*

$$\frac{\partial f_y}{\partial x}(u_0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(u_0) . \tag{6.3}$$

Nella dimostrazione useremo il segunte

Lemma 3 *Sia $B := B_r(u_0)$ una sfera di centro $u_0 = (x_0, y_0)$ e raggio r e sia $f : B \to \mathbb{R}$. Assumiamo che esistano f_x e $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}$ in ogni punto di B e si denoti, per ogni $(h, k) \in B_r(0, 0)$,*

$$\alpha(h, k; u_0) := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) . \tag{6.4}$$

Allora per ogni $(h,k) \in B_r(0,0)$ esiste $v \in B_r(x_0,y_0)$ tale che

$$\alpha(h,k;u_0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(v)hk \ . \tag{6.5}$$

Dimostrazione (del Lemma 3) Fissiamo $(h,k) \in B_r(0,0)$ e definiamo la funzione $F(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$. Dalle ipotesi segue che F è continua sull'intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$ e derivabile al suo interno. Dunque per il teorema del valor medio esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$\alpha(h,k;u_0) = F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0+th)h = [f_x(x_0+th, y_0+k) - f_x(x_0+th, y_0)]h \ .$$

Sia ora $G(y) := f_x(x_0 + th, y)$. Dalle ipotesi segue che G è continua sull'intervallo di estremi y_0 e $y_0 + k$ e derivabile al suo interno. Dunque ancora per il teorema del valor medio esiste $s \in (0,1)$ tale che

$$\alpha(h,k;u_0) = [G(y_0+k) - G(y_0)]h = G'(y_0+sk)hk = \frac{\partial f_x}{\partial y}(v)hk$$

con $v = (x_0 + th, y_0 + sk)$. ∎

Dimostrazione (del Teorema 2) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi segue che esiste $r > 0$ tale che $B_r(u_0) \subset A$ e

$$\left| \frac{\partial f_x}{\partial y}(u) - \frac{\partial f_x}{\partial y}(u_0) \right| < \varepsilon \ , \qquad \forall\ u \in B_r(x_0,y_0) \ . \tag{6.6}$$

Siano h e k due numeri in modulo minori di $r/2$, cosicché $(h,k) \in B_r(0,0)$. Per il Lemma 3 esiste $v \in B_r(x_0,y_0)$ tale che vale (6.5) (con α definito in (6.4)). Dunque

$$\left| \frac{\alpha(h,k;u_0)}{hk} - \frac{\partial f_x}{\partial y}(u_0) \right| = \left| \frac{\partial f_x}{\partial y}(v) - \frac{\partial f_x}{\partial y}(u_0) \right| \ ,$$

e per (6.6)

$$\left| \frac{\alpha(h,k;u_0)}{hk} - \frac{\partial f_x}{\partial y}(u_0) \right| < \varepsilon \ .$$

Prendendo il limite per k che tende a zero in tale relazione si ottiene

$$\left| \frac{f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0+h, y_0)}{h} - \frac{\partial f_x}{\partial y}(u_0) \right| \le \varepsilon \ , \qquad \forall\ 0 < |h| < \frac{r}{2} \ ,$$

il che è equivalente alla tesi. ∎