1 Successioni e serie di funzioni

1.1 Successioni di funzioni

Definizione 1 *Siano f_k, per $k \in \mathbb{N}$, ed f funzioni definite su un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Diremo che la successione di funzioni $\{f_k\}$ converge uniformemente in A se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_0 \text{ t.c. } \ |f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon\ ,\quad \forall\ k, h \geq k_0\ ,\ \forall\ x \in A\ . \tag{1.1}$$

Diremo che la successione di funzioni $\{f_k\}$ converge uniformemente in A ad f se

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_0 \text{ t.c. } \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\ ,\quad \forall\ k \geq k_0\ ,\ \forall\ x \in A\ , \tag{1.2}$$

ovvero, equivalentemente, se

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in A} |f_k(x) - f(x)| = 0\ . \tag{1.3}$$

Osservazione 2 Da tale definizione segue che, se $\{f_k\}$ è una successione uniformemente convergente in A, le successioni $\{f_k(x)\}$ sono di Cauchy per ogni $x \in A$. Quindi esiste il limite, per k che tende ad infinito, di tali successioni e, se denotiamo tale limite $f(x)$, prendendo il limite per h che tende ad infinito in (1.1), otteniamo

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ ,\quad \forall\ k \geq k_0\ ,\ \forall\ x \in A\ ,$$

che, per l'arbitrarietà di ε, è equivalente a (1.3). D'altra parte, se $\{f_k\}$ converge uniformemente ad f in A, vale, ovviamente, la (1.1). Dunque: *$\{f_k\}$ converge uniformemente in A se e solo se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $\{f_k\}$ converge uniformemente ad f in A.*

Proposizione 3 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f_k \in C(A, \mathbb{R})$. La successione $\{f_k\}$ converge uniformemente in A se e solo se esiste $f \in C(A, \mathbb{R})$ per cui $\{f_k\}$ converge uniformemente in A ad f.*

Dimostrazione In vista dell'Osservazione precedente l'unica cosa da dimostrare è che se $\{f_k\}$ è una successione di funzioni continue uniformemente convergente in un insieme A allora il limite f è anch'esso continuo su A. Sia $x_0 \in A$ e sia $\varepsilon > 0$ e sia $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tale che $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ per ogni $x \in A$ e per ogni $k \geq k_0$. Sia ora $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tale che $|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon/3$ per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$. Allora, se $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\ ,$$

ovvero f è continua in x_0. ∎

Osservazione 4 (i) Dalla dimostrazione segue anche che se le funzioni f_k sono *uniformemente continue su A allora anche f sarà uniformemente continua su A*, in tal caso, infatti, il δ nella dimostrazione precedente dipenderà solo da ε (si noti che anche k_0 dipende solo da ε).

(ii) *Sia $B \subset \partial A \subset \mathbb{R}$. Se $f_k \in C(A \cup B)$ e $\{f_k\}$ converge uniformemente in A allora $\{f_k\}$ converge uniformemente in $A \cup B$*, come segue immediatamente dalla continuità di f_k su $A \cup B$ osservando che, in tal caso, $\sup_{A\cup B} |f_k - f_h| = \sup_A |f_k - f_h|$. In particolare, dunque, se $f_k \in C([a,b))$ e se $\{f_k\}$ converge su (a,b) ma $f_k(a)$ non converge, allora la convergenza su (a,b) non è uniforme.

I prossimi risultati danno dei criteri sufficienti affinché si possa scambiare l'ordine dei limiti tra integrazione o derivazione e nel calcolare il limite di una successione di funzioni.

Proposizione 5 *Se la successione $\{f_k\} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ converge uniformemente ad f allora*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx = 0 \ , \qquad \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx \ . \tag{1.4}$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi (si veda, in particolare, (1.3)) segue che esiste $k_0 > 0$ tale che, per ogni $k \geq k_0$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ .$$

Da tale relazione segue che

$$\int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \ ,$$

il che dimostra la prima relazione in (1.4). La seconda relazione in (1.4) è conseguenza del fatto che

$$\Big|\int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \ . \quad \blacksquare$$

Proposizione 6 *Sia A un intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $\{f_k\} \subset C^1(A)$. Assumiamo che, per $x_0 \in A$ e per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = \alpha$ e che $\{f_k'\}$ sia una successione uniformemente convergente su A. Allora $f_k(x)$ converge per ogni $x \in A$ ad $f(x)$ con $f \in C^1(A)$ e $\{f_k'\}$ converge (uniformemente) a f' su A. Se A è limitato allora anche $\{f_k\}$ converge uniformemente a f in A.*

Dimostrazione Dalla Proposizione 3 segue che esiste $g \in C(A)$ tale che $\{f_k'\}$ converge uniformemente a g in A. Dalla Proposizione 5, dal teorema fondamentale del calcolo e dalla ipotesi su $\{f_k(x_0)\}$ segue che, per ogni $x \in A$,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \Big(f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f_k'(t) dt \Big) = \alpha + \int_{x_0}^x g(t) dt \ . \tag{1.5}$$

Se denotiamo $f(x)$ tale limite, da (1.5) (ancora per il teorema fondamentale del calcolo) segue che $f \in C^1(A)$ e che $f' = g$, il che dimostra la prima parte della tesi.

Assumiamo ora che A sia limitato e cioè che $A = (a,b)$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste k_0 tale che, per ogni $k \geq k_0$,

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \sup_A |f_k'(x) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\;.$$

Dalla Proposizione 5 segue che, per ogni $x \in A$ e per ogni $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &= \Big| f_k(x_0) - f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(f_k'(y) - f'(y)\big) dy \Big| \\ &\leq |f_k(x_0) - f(x_0)| + \Big| \int_{x_0}^{x} |f_k'(y) - f'(y)| dy \Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (b-a)\, \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon\;. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 7 Si noti che per dedurre l'uniforme convergenza di $\{f_k\}$, l'ipotesi che A sia limitato è essenziale: $f_k(x) \equiv x/k$ converge a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_k' = 1/k$ converge a 0 *uniformemente* su $\mathbb{R}$ ma f_k non converge uniformemente a 0 (per ogni k, $\sup_{\mathbb{R}} |f_k| = \infty$).

1.2 Serie di funzioni. Convergenza totale.

Studiare una serie di funzioni $\sum_{k\geq 0} u_k$ (con $u_k : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) equivale a studiare la successione delle "ridotte"

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} u_k \tag{1.6}$$

e dunque tutto ciò che si è detto per successioni di funzioni si estende immediatamente a serie di funzioni. A titolo di esempio, osservando che, per $m \geq n$,

$$f_m - f_{n-1} = \sum_{k=n}^{m} u_k$$

si ha che *una serie di funzioni* $\sum u_k$, $u_k : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *converge uniformemente su* A *se e solo se la serie* $\sum u_k(x)$ *converge per ogni* $x \in A$ *e se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) \Big| = 0\;. \tag{1.7}$$

Vi è però un concetto nuovo particolarmente naturale nell'ambito delle serie ed è quello di *convergenza totale*:

Definizione 8 *Diremo che la serie di funzioni* $\sum u_k$, $u_k : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *converge totalmente su* A *se converge la serie numerica a termini non negativi* $\sum \sup_A |u_k|$ *ovvero se*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{x\in A} |u_k(x)| = 0\;. \tag{1.8}$$

Ovviamente, poiché per ogni $m \geq n$, e per ogni $x \in A$

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n}^{m} \sup_A |u_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sup_A |u_k| \ ,$$

prendendo prima il limite per $m \to \infty$ (nel primo membro) e poi l'estremo superiore per $x \in A$, si ha che $\sup_A \Big|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sup_A |u_k(x)|$ e cioè che *la convergenza totale implica la convergenza uniforme.*
Come è naturale aspettarsi vi sono esempi di serie che convergono uniformemente, ma non totalmente, su di un insieme:

Esempio 9 Si consideri la serie $\sum u_k$ con $u_k \equiv x^k/k$. Tale serie converge assolutamente se $|x| < 1$, converge "condizionatamente" (criterio di Leibnitz) per $x = -1$ e non converge se $|x| > 1$. Vediamo che tipo di convergenza si ha nell'"intervallo di convergenza puntuale" e cioè in $[-1, 1)$. Poiché, per $a \geq 0$,

$$\sup_{|x| \leq a} \Big|\frac{x^k}{k}\Big| = \frac{a^k}{k} \ ,$$

si ha che $\sum u_k$ converge totalmente in $\{|x| \leq a\}$ se $a < 1$ mentre non converge totalmente in insiemi della forma $[-1, a)$ o $[-a, 1)$ con $a < 1$. Invece, poiché per $-1 \leq x \leq 0$ e per $m \geq n$, si ha che[1]

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k}\Big| = \Big|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k \frac{|x|^k}{k}\Big| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \ ,$$

si ha che $\sum u_k$ converge uniformemente in $[-1, a]$ per ogni $0 < a < 1$ (e, naturalmente non converge uniformemente in $[a, 1)$ essendo $\sup_{[a,1)} |\sum_{k=n}^{m} u_k| = \sum_{k=n}^{m} (1/k)$).

[1] Se $\{a_k\}$ è una successione monotona di numeri non negativi, non crescenti che tendono a 0, allora $|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k| \leq a_n$.