3 Formula di Stirling

Nel corso della dimostrazione della formula di Stirling (che dà una valutazione asintotica dell'andamento di $n!$ per grandi n) useremo i seguenti risultati.

Lemma 1 (La funzione Gamma di Eulero) *Per $x > 0$ sia*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \ . \tag{3.1}$$

Allora, tale integrale converge assolutamente (in senso improprio) e si ha

$$\begin{aligned} &\Gamma(1) = 1 \ , \\ &\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ , \qquad \forall x > 0 \ , \\ &\Gamma(n+1) = n! \ , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dimostrazione Fissiamo $x > 0$. Poiché

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha e^{-t} = 0 \ , \qquad \forall \ \alpha \in \mathbb{R} \ ,$$

esiste $t_0 = t_0(x)$ tale che

$$t^{x+1} e^{-t} < 1 \ , \qquad \forall \ t \geq t_0 \ . \tag{3.3}$$

Dunque, per ogni $a \in (0,1)$ e $b > t_0$ si ha che

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{x-1} e^{-t} \, dt &= \int_a^1 t^{x-1} e^{-t} \, dt + \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t} \, dt + \int_{t_0}^b t^{x-1} e^{-t} \, dt \\ &< \int_a^1 t^{x-1} \, dt + \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t} \, dt + \int_{t_0}^b \frac{1}{t^2} \, dt \\ &= \frac{1-a^x}{x} + \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t} \, dt + \Big(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{b}\Big) \\ &< \frac{1}{x} + \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t} \, dt + \frac{1}{t_0} =: c(x). \end{aligned}$$

Dunque, esiste una costante $c := c(x)$ tale che

$$\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \, dt \leq c$$

per ogni $0 < a < 1$ e $b > t_0$, il che equivale a dire che l'integrale $\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \, dt$ converge assolutamente (in senso improprio) per ogni $x > 0$.

La prima relazione in (3.2) deriva immediatamente dalla definizione, poiché

$$\Gamma(1) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} \, dt = \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1 \ .$$

Analogamente, integrando per parti, per ogni $x > 0$, si ha che

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\, dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left\{ \Big[-t^x e^{-t} \Big]_0^b + x \int_0^b t^{x-1} e^{-t}\, dt \right\} \\ &= x\Gamma(x)\ .\end{aligned}$$

L'ultima relazione in (3.2) deriva immediatamente dalle prime due. ∎

Lemma 2 *Per $u > -1$ si definisca*

$$h(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{u^2}\Big(u - \log(1+u)\Big)\ , & \text{se } 0 \neq u > -1\ , \\ 1\ , & \text{se } u = 0\ . \end{cases} \tag{3.4}$$

Allora, h è una funzione strettamente decrescente e di classe[1] $C^\infty\Big((-1,\infty)\Big)$.

In particolare

$$-1 < u < 0 \implies h(u) > 1\ , \qquad h(0) = 1\ . \tag{3.5}$$

Dimostrazione (del Lemma 2) Se $|u| < 1$, dalla serie di Taylor per $\log(1+u)$,

$$\log(1+u) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k}\ , \tag{3.6}$$

segue che

$$\frac{u^2}{2} h(u) = \sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{u^k}{k} = u^2 \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{u^j}{j+2} =: u^2 \tilde{h}(u)\ , \tag{3.7}$$

dove

$$\tilde{h}(u) := \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{u^j}{j+2}\ . \tag{3.8}$$

La funzione $\tilde{h}$ è una serie di potenze con raggio di convergenza 1 e $\tilde{h}(0) = \frac{1}{2}$ e, dunque, da (3.7) segue che $h = 2\tilde{h}$ ed in particolare (poiché le serie di potenze sono funzioni C^∞) segue che $h \in C^\infty\Big((-1,1)\Big)$. Naturalmente, h è C^∞ per $u > 0$ (essendo esprimibile come somma, rapporto o composizione di funzioni C^∞ su $(0,\infty)$) e dunque $h \in C^\infty\Big((-1,\infty)\Big)$. Si osservi che, da (3.8) segue che

$$h'(0) = 2\tilde{h}'(0) = -\frac{2}{3}\ . \tag{3.9}$$

[1] Le funzioni $C^\infty\Big((a,b)\Big)$ sono le funzioni che ammettono derivate di ordine arbitrario in (a,b).

Dimostriamo, ora, che $h'(u) < 0$ anche per $-1 < u \neq 0$. Per $u \neq 0$ si ha

$$\frac{1}{2} h'(u) = -\frac{1}{u^2} \left(\frac{2+u}{1+u} - 2 \ \frac{\log(1+u)}{u} \right) \ , \tag{3.10}$$

cosicché $h'(u) < 0$ per $u \neq 0$ è equivalente a

$$\frac{2+u}{1+u} > 2 \ \frac{\log(1+u)}{u} \ , \qquad 0 \neq u > -1 \ , \tag{3.11}$$

ovvero, se poniamo

$$f(u) := \frac{2u+u^2}{1+u} \ , \qquad g(u) := 2 \ \log(1+u) \ , \tag{3.12}$$

la (3.11) diviene equivalente a

$$f(u) < g(u) \ , \ \text{per} \ -1 < u < 0 \ , \ \text{e} \ \ f(u) > g(u) \ , \ \text{per} \ u > 0 \ . \tag{3.13}$$

Osserviamo che (3.13) è implicata da $f(0) = g(0)$ e da $f'(u) > g'(u)$ per[2] $u \neq 0$. Ma $f(0) = 0 = g(0)$ e

$$f'(u) - g'(u) = 1 + \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{2}{1+u} = \frac{u^2}{(1+u)^2} > 0$$

se $u \neq 0$. ∎

Lemma 3 *(i) Supponiamo che g_n converga uniformemente a g su $A \subset \mathbb{R}$ e che f sia una funzione uniformemente Lipschitziana su un dominio[3] $[a,b]$ che contenga i codomini di g e g_n (per ogni n). Allora $f \circ g_n$ converge uniformemente a $f \circ g$ su A.*

(ii) Se g_n converge uniformememte a g su A e se f è limitata su[4] A allora $f g_n$ converge uniformemente a fg.

Dimostrazione (i): Se L è la costante di Lipschitz di f su $[a,b]$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f \circ g_n(x) - f \circ g(x)| \leq L \lim_{n\to\infty} \ \sup_{x\in A} |g_n(x) - g(x)| = 0 \ .$$

[2]Infatti, in tal caso, $f(u) - g(u) = \int_0^u (f' - g')$, che è una quantità positiva per $u > 0$ e negativa per $u < 0$.

[3]Una funzione f si dice **uniformemente Lipschitziana su** $B \subset \mathbb{R}$ se esiste $L > 0$ tale che

$$|f(y) - f(y')| \leq L \ |y - y'| \ , \qquad \forall \ y, y' \in B \ .$$

Il numero L si chiama **costante di Lipschitz di** f **su** B. Si noti che una funzione $f \in C^1(B)$, (B aperto di $\mathbb{R}$), con $\sup_B |f'| \leq M$ è uniformemente Lipschitziana su A con costante di Lipschitz $L = M$.

[4]f **è limitata su** A se esiste M tale che $\sup_A |f| \leq M$. Una funzione continua su un compatto A è ivi limitata per il teorema di Weierstrass.

(ii): Se $M \geq \sup_A |f|$, si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f(x)|\,|g_n(x) - g(x)| \\ &\leq M \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |g_n(x) - g(x)| = 0 \ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma 4 *Sia h come nel Lemma 2 e, per $n \geq 1$, si definisca*

$$\psi_n(s) := \begin{cases} e^{-s^2 h(s\sqrt{2/n})} \ , & \text{se } s > -\sqrt{n/2} \ , \\ 0 \ , & \text{se } s \leq -\sqrt{n/2} \ . \end{cases} \tag{3.14}$$

Allora, per ogni $a > 0$, ψ_n converge uniformemente a e^{-s^2} su $[-a, a]$. Inoltre, esiste $s_0 \geq 1$ tale che

$$\psi_n(s) \leq e^{-|s|} \ , \qquad \forall\ |s| \geq s_0 \ , \quad \forall\ n \geq 1 \ . \tag{3.15}$$

Dimostrazione Poiché h è continua in 0, per ogni $a > 0$ la successione di funzioni $h(s\sqrt{2/n})$ converge uniformemente a $h(0) = 1$ su[5] $[-a, a]$. Per la parte (ii) del Lemma 3, $-s^2 h(s\sqrt{2/n})$ converge uniformemente a $-s^2$ su $[-a, a]$ e per la parte (i) del Lemma 3 (poiché $y \to e^y$ è uniformemente Lipschitziana sui compatti di $\mathbb{R}$), si ha che la successione di funzioni $\exp\big(-s^2 h(s\sqrt{2/n})\big)$ converge uniformemente a $\exp(-s^2)$ su $[-a, a]$. Poiché, per $n \geq 2a^2$, $\psi_n(s)$ coincide con $\exp\big(-s^2 h(s\sqrt{2/n})\big)$ su $[-a, a]$ segue che ψ_n converge uniformemente a $\exp(-s^2)$ su $[-a, a]$.

Per $s \leq -\sqrt{n/2}$, la (3.15) è banalmente verificata. Assumiamo, dunque, $s > -\sqrt{n/2}$, In tal caso, la relazione $\psi_n(s) \leq e^{-|s|}$ è equivalente a

$$|s| h(s\sqrt{2/n}) \geq 1 \ . \tag{3.16}$$

Si ricordi (formula (3.5)) che $h(u) > 1$ se $u < 0$. Dunque, se $-\sqrt{n/2} < s \leq -1$

$$|s| h(s\sqrt{2/n}) > |s| \geq 1 \ ,$$

che dimostra la (3.15) per s negativi (e con un qualunque $s_0 \geq 1$).

Per $s > 0$, poiché h è decrescente,

$$s\ h(s\sqrt{2/n}) \geq s\ h(s\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \frac{\log(1 + \sqrt{2}s)}{s} \ ,$$

e tale funzione tende a $\sqrt{2}$ quando $s \to \infty$; quindi esiste un $s_0 \geq 1$ tale che

$$\sqrt{2} - \frac{\log(1 + \sqrt{2}s)}{s} \geq 1 \ , \qquad \forall\ s \geq s_0 \ ,$$

il che dimostra (3.16) per $s \geq s_0$ (e per ogni $n \geq 1$). $\blacksquare$

[5] Dato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|h(u) - 1| < \varepsilon$ per ogni $|u| \leq \delta$ e sia $N := 2(a/\delta)^2$. In tal caso, per ogni $n \geq N$ e per ogni $|s| \leq a$, $|s\sqrt{2/n}| \leq \delta$ e dunque $|h(s\sqrt{2/n}) - 1| < \varepsilon$, il che equivale a dire che $h(s\sqrt{2/n})$ converge uniformemente a 1 su $[-a, a]$.

Teorema 5 (Formula di Stirling)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \ . \tag{3.17}$$

Dimostrazione Dai lemmi 1 e 2, ponendo $t = x(1+u)$ nella definizione di $\Gamma(x+1)$, segue che

$$n! = \Gamma(n+1) = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{\infty}\Big((1+u)e^{-u}\Big)^n du = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{\infty} e^{-n\frac{u^2}{2}h(u)}du \ . \tag{3.18}$$

Cambiando nuovamente variabile di integrazione, ponendo $u = s\sqrt{\frac{2}{n}}$, in (3.18) ed usando (3.14) si trova

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(s)ds \ , \tag{3.19}$$

ovvero

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(s)ds \ . \tag{3.20}$$

Sia $0 < \varepsilon < 1$ e sia

$$a := a(\varepsilon) := \max\Big\{ \log(8/\varepsilon) \ , \ s_0 \Big\} \ . \tag{3.21}$$

Poiché (per il Lemma 4) ψ_n converge uniformemente a e^{-s^2} su $[-a,a]$. Per la Proposizione 5 di paragrafo §1, segue che

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}\psi_n(s)\ ds = \int_{-a}^{a} e^{-s^2}\ ds \ ,$$

e dunque esiste $N := N(\varepsilon)$ tale che

$$\left|\int_{-a}^{a}\psi_n(s)\ ds - \int_{-a}^{a}e^{-s^2}\ ds\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \ , \qquad \forall\ n \ge N \ . \tag{3.22}$$

Per (3.15), (3.22) (ed osservando che $e^{-s^2} \le e^{-|s|}$ se $|s| \ge 1$) si ha che, per ogni $n \ge N$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(s)\ ds - \int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\ ds\right| \\
\le\ &\left|\int_{-a}^{a}\psi_n(s)\ ds - \int_{-a}^{a}e^{-s^2}\ ds\right| + \int_{\{|s|\ge a\}}\psi_n(s)ds \ + \ \int_{\{|s|\ge a\}}e^{-s^2}ds \\
\le\ &\left|\int_{-a}^{a}\psi_n(s)\ ds - \int_{-a}^{a}e^{-s^2}\ ds\right| + 4\int_{a}^{\infty}e^{-s}\ ds \\
\le\ &\frac{\varepsilon}{2} + 4e^{-a} \le \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

cioè, ricordando la (2.19),

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(s)ds = \sqrt{\pi} \ . \tag{3.23}$$

Da (3.20) e da (3.23) segue (3.17). ∎