5 Esempio di insieme connesso ma non conneso per curve

(i) $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **sconnesso** se esistono due insiemi aperti A_i di $\mathbb{R}^2$ disgiunti e tali che $E \cap A_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$ e $E \subset A_1 \cup A_2$;

(ii) $E \subset \mathbb{R}^2$ è **connesso** se non è sconnesso;

(iii) $E \subset \mathbb{R}^2$ è **connesso per curve** (o connesso per archi) se per ogni $v_1, v_2 \in E$ esiste un **cammino** in E che va da v_1 a v_2, cioè, se esistono due funzioni continue $t \in [a,b] \to x(t)$ e $t \in [a,b] \to y(t)$ tali che $\big(x(a), y(a)\big) = v_1$, $\big(x(b), y(b)\big) = v_2$ e $\big(x(t), y(t)\big) \in E$ per ogni $t \in [a,b]$.

Sia $E_1 := \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$, $E_2 := \Big\{(x,y) : \ y = \operatorname{sen}(1/x), \text{ per ogni } x \in (0, 1/\pi]\Big\}$, e sia $E := E_1 \cup E_2$.

Proposizione 1 *E è connesso ma non è connesso per curve.*

Lemma 2 (a) *Sia $t \in [a,b] \to x(t)$ una funzione continua e tale che $x(a) = 0$ e $x(t) > 0$ se $t \in (a,b]$. Allora per ogni successione strettamente decrescente $\{\alpha_k\}$ con $\alpha_1 < x(b)$, esiste una successione strettamente decrescente $\{t_k\} \subset (a,b)$ convergente ad a e tale che $x(t_k) = \alpha_k$.*
(b) *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $t \in [a,b] \to x(t)$ e $t \in [a,b] \to y(t)$ funzioni continue. Se $\big(x(t_0), y(t_0)\big) \in A$ allora esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $t \in [a,b]$ con $|t - t_0| < \delta$ si ha che $\big(x(t), y(t)\big) \in A$.*

Dimostrazione (a): Poiché x è continua su $[a,b]$, x assume tutti i valori tra $0 = x(a)$ e $x(b) > 0$, quindi esiste $t_1 \in (a,b)$ tale che $x(t_1) = \alpha_1$. Similmente, (poiché x è continua su $[a, t_1]$ e $x(t_1) = \alpha_1 > \alpha_2$), esiste $t_2 \in (a, t_1)$ tale che $x(t_2) = \alpha_2$. Iterando, si ottiene una successione $\{t_k\} \subset (a,b)$ tale che $x(t_k) = \alpha_k$. Sia $\tau = \inf\{t_k\} = \lim t_k$. Tale numero è non inferiore ad a e se fosse $\tau > a$ (per la continuità di x in τ) si avrebbe: $0 = \lim \alpha_k = \lim x(t_k) = x(\tau) > 0$, il che è assurdo. Dunque $\tau = a$.

(b): Poiché A è aperto esiste $r > 0$ tale che $B_r\big(x(t_0), y(t_0)\big) \subset A$. Poiché $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ sono continue in t_0, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{r}{\sqrt{2}} \ , \quad |y(t) - y(t_0)| < \frac{r}{\sqrt{2}} \ , \qquad \forall \ t \in [a,b] \ , |t - t_0| < \delta \ .$$

Dunque, per tali t,

$$\Big|\big(x(t), y(t)\big) - \big(x(t_0), y(t_0)\big)\Big| = \sqrt{\big(x(t) - x(t_0)\big)^2 + \big(y(t) - y(t_0)\big)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = r \ ,$$

il che vuol dire $\big(x(t), y(t)\big) \in B_r\big(x(t_0), y(t_0)\big) \subset A$. ∎

Dimostrazione (della Proposizione) Dimostriamo prima che E non è connesso per curve. Se lo fosse, esisterebbe un cammino $t \in [0,1] \to \big(x(t), y(t)\big) \in E$ tale che $\big(x(0), y(0)\big) = (0,0) \in E_1$ e $\big(x(1), y(1)\big) = (1/\pi, 0) \in E_2$. Sia

$$I := \Big\{t \in (0,1] : x(s) > 0 \ , \qquad \forall\, t \le s \le 1\Big\} \ .$$

Chiaramente $1 \in I$. Sia $\tau = \inf I$. Dalla continuità di x e la definizione di τ segue che $x(\tau) = 0$ (se $\tau = 0$, $x(\tau) = 0$, se fosse $x(\tau) > 0$ con $\tau > 0$ per il teorema della permanenza del segno $x(t) > 0$ per t in un intorno sinistro di τ che contraddirrebbe la definizione di estremo inferiore). Sia $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\operatorname{sen}\theta \neq y(\tau)$$

e sia

$$\alpha_k = \frac{1}{\theta + 2\pi k} \ .$$

Si osservi che α_k è una successione strettamente decrescente convergente a $0 = x(\tau)$ e che $\alpha_1 < 1/\pi = x(1)$. Per la parte (a) del lemma, esiste una successione strettamente decrescente $\{t_k\} \subset (\tau, 1)$ tale che $\lim t_k = \tau$ e $x(t_k) = \alpha_k$. Ma questo implicherebbe che[1]

$$\begin{aligned}
\big(x(\tau), y(\tau)\big) &= \lim \big(x(t_k), y(t_k)\big) = \lim \left(x(t_k),\, \operatorname{sen}\frac{1}{x(t_k)}\right) \\
&= \lim \Big(x(t_k),\, \operatorname{sen}\frac{1}{\alpha_k}\Big) = \lim \Big(x(t_k),\, \operatorname{sen}(\theta + 2\pi k)\Big) \\
&= \lim \Big(x(t_k),\, \operatorname{sen}\theta\Big) = (0,\, \operatorname{sen}\theta) \\
&= (x(\tau),\, \operatorname{sen}\theta) \ ,
\end{aligned}$$

ottenendo così una contraddizione poiché, per la scelta di θ, $y(\tau) \neq \operatorname{sen}\theta$.

Passiamo a dimostrare che E è connesso. Supponiamo, per assurdo, che E sia sconnesso. Siano A_i come sopra in (i). Assumiamo (senza perdita di generalità) che A_2 contenga $(1/\pi, 0)$. Sia

$$I := \Big\{\xi \ge 0 : \Big(x,\, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big) \in A_2 \ , \qquad \forall\, \xi \le x \le 1/\pi\Big\} \ .$$

Chiaramente $1/\pi \in I$. Sia $x_0 = \inf I$. Dalla parte (b) del lemma segue che $x_0 = 0$ (se fosse $x_0 > 0$, si avrebbe $(x_0, \operatorname{sen}(1/x_0) \in A_2$ e poiché A_2 è aperto e $x \to (x, \operatorname{sen} 1/x)$ un cammino per x in un intorno di x_0 si avrebbe che $(x, \operatorname{sen} 1/x) \in A_2$ per x in un intorno sinistro di x_0, il che contraddirrebbe il fatto che x_0 è l'estremo inferiore di I). Dunque $E_2 \subset A_2$. Dalle ipotesi fatte segue che esiste $\bar{y} \in [-1,1]$ tale che $(0, \bar{y}) \in A_1 \cap E_1$. Sia $B_r(0, \bar{y}) \subset A_1$. Poiché la funzione $\operatorname{sen} t$ assume tutti i valori in $[-1,1]$ su ogni intervallo

[1] Si osservi che se $x(t) > 0$ allora $y(t) = \operatorname{sen}(1/x(t))$.

della forma $(a, a+2\pi]$, esiste $\bar{t} \in (r, r+2\pi]$ tale che $\operatorname{sen} \bar{t} = \bar{y}$. Ponendo $\bar{x} = 1/\bar{t}$ si ha che $\bar{x} \in [(r+2\pi)^{-1}, r^{-1}) \subset (0, r^{-1})$ e $\operatorname{sen}(1/\bar{x}) = \bar{y}$. Dunque

$$\left| \left(\bar{x}, \operatorname{sen} \frac{1}{\bar{x}} \right) - (0, \bar{y}) \right| = |\bar{x}| < r \ ,$$

ovvero $\left(\bar{x}, \operatorname{sen} \frac{1}{\bar{x}} \right) \in A_1 \cap E_2 \subset A_1 \cap A_2$, il che contraddice il fatto che A_1 e A_2 sono disgiunti. $\blacksquare$