Prova scritta di AM2 del 13/1/2003 – (Appello A/recupero esoneri)

- **Recupero I esonero:** *esercizi 1-6; per ottenere la sufficienza è necessario svolgere in modo sufficiente gli esercizi 1 e 2.*
- **Recupero II esonero:** *esercizi 7-11; per ottenere la sufficienza è necessario svolgere in modo sufficiente gli esercizi 7 e 8.*
- **Scritto appello A:** *esercizi 1, 3, 4 (i), 6 (i), 8, 9, 10; per ottenere la sufficienza è necessario svolgere in modo sufficiente gli esercizi 1 e 8.*
- *Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.*

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivazione di successioni di funzioni. Illustrare il teorema con esempi e controesempi.

2) Enunciare la formula di Stirling e dare una traccia della dimostrazione.

3) Sia $f_n(x) = n^4 e^{-nx^2} + \frac{1}{n} \operatorname{sen} n^2 x$.
(i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di $\{f_n\}$.
(ii) Studiare $\lim \int_0^1 f_n(x)dx$.

4) Studiare la convergenza puntuale, totale ed uniforme delle serie:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\cosh(xn)} \, , \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\cosh(x/n)} \, .$$

5) Sia $f(x) = (8 - x^3)^{-1}$.
Calcolare la serie di Taylor di f in $x = 0$.
(ii) Calcolare $f^{(6)}(0)$.

6) Discutere i seguenti integrali impropri:

$$\text{(i)} \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-\cos x)^{\frac{1}{4}}} \, , \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^x} \, .$$

7) (i) Dare un esempio di funzione continua in $(0,0)$ ma non ivi differenziabile.
(ii) dare un esempio di funzione che ammetta tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ ma non ivi continua.

8) Enunciare e dimostrare il lemma di Schwarz. Illustrare tale lemma con esempi e controesempi.

9) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 2xy}{x^2 + y^2} \, , & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \, , \\ 0 \, , & \text{se } (x,y) = (0,0) \, . \end{cases}$$

(i) Calcolare tutte le derivate direzionali in $(0,0)$.
(ii) Discutere la continuità e la differenziabilità di f su $\mathbb{R}^2$.

10) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \neq 1\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = x^4 e^{\frac{x}{1-y}}$.
(i) Determinare l'estremo superiore ed inferiore di f su A.
(ii) Discutere i punti stazionari di f su A.
(iii) Dimostrare direttamente che f è differenziabile in $(0,0)$.

11) (i) Trovare tutti i valori di $\log \frac{1}{1+i}$ e di $(1+i)^i$.
(ii) Calcolare $\operatorname{senh}\left(i\frac{\pi}{2}\right)$.