Soluzioni Prova scritta di AM2 del 13/2/2003 – (Appello B)

3) La serie $\sum u_n(x)$ converge totalmente in $[2+\varepsilon,\infty)$, per ogni $\varepsilon > 0$; non converge per $x \le 2$ (e quindi non converge uniformemente in $[2,\infty)$).

Infatti
$$u_n(x) = \sqrt{n^x+\pi} - \sqrt{n^x} = \frac{\pi}{\sqrt{n^x+\pi}+\sqrt{n^x}}\ ,$$

e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{n^x+\pi}+\sqrt{n^x}}\Big(\frac{\pi}{n^{x/2}}\Big)^{-1} = 1$ e quindi (criterio del "confronto asintotico") $\sum u_n(x)$ converge se e solo se $x > 2$. Se $x \ge 2+\varepsilon$,

$$0 \le u_n(x) \le \frac{\pi}{n^{x/2}} \le \frac{\pi}{n^{1+2\varepsilon}}$$

il che mostra la convergenza totale in $[2+\varepsilon,\infty)$.

4) L'integrale converge assolutamente in senso improprio.

Infatti, se $0 < \varepsilon < 1$ allora
$$\int_\varepsilon^1 \sqrt{1-\cos\frac{1}{x^2}}\ dx \le \sqrt{2}$$

il che mostra che l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-\cos\frac{1}{x^2}}\ dx$ converge assolutamente. Sia $\delta > 0$ tale che
$$|1-\cos t| \le 2t^2\ .$$

Se $x > 1/\sqrt{\delta}$ allora $1/x^2 < \delta$ e dunque, per ogni $a > 1/\sqrt{\delta}$, si ha

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^a \sqrt{1-\cos\frac{1}{x^2}}\ dx \le \sqrt{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^a \frac{1}{x^2}\ dx \le \frac{\sqrt{2}}{\delta}\ .$$

Quindi l'integrale improprio $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \sqrt{1-\cos\frac{1}{x^2}}\ dx$ converge assolutamente, da questo segue immediatamente l'asserto.

5) $\sup f = \infty$; $\inf f = -\infty$; l'unico punto stazionario (la cui matrice hessiana ha un autovalore nullo) è l'origine che è una sella.

Infatti,

$$\lim_{n\to\infty} f(0,n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty\ , \qquad \lim_{n\to\infty} f\Big(n,\frac{3}{2}n^2\Big) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{4}n^4 = -\infty\ ,$$

e, per quanto riguarda l'origine, si ha

$$f\Big(\frac{1}{n},\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}\Big) = -\frac{1}{4}\frac{1}{n^4} < 0 = f(0,0) < f\Big(0,\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\ .$$

6) Tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle. Sia $X = \{(x,y) : |x| = |y|\}$. La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash X)$, nell'intorno di ogni punto di X la funzione è illimitata (e quindi non è continua, né differenziabile nei punti di X).

Infatti: sia $v = (\xi, \eta)$. Se $|\xi| = |\eta|$ allora $f(t\xi, t\eta) - f(0,0) = 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ per tali v. Sia ora v tale che $|\xi| \neq |\eta|$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\xi, t\eta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} t \frac{\xi^4}{\xi^2 - \eta^2} = 0 \ .$$

Sia $(x_0, y_0) \in X \backslash \{(0,0)\}$, allora

$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}, y_0\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)^4 + 1}{\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)^2 - y_0^2} = \infty \ ,$$

(e questo implica che f è illimitata anche in un qualunque intorno dell'origine).