1.4 Integrazione di funzioni continue su insiemi normali

Proposizione 4 *Siano $\alpha, \beta \in C([a,b], \mathbb{R})$ tali che $\alpha(x) \le \beta(x)$ per ogni $x \in [a,b]$; sia*

$$A := \Big\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \quad y \in [\alpha(x), \beta(x)]\Big\} \ ; \tag{1.30}$$

e sia $f \in C(A, \mathbb{R})$. Allora A è misurabile (secondo Peano-Jordan); f è integrabile su A; la funzione

$$F(x) := x \to \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \ , \tag{1.31}$$

è continua su $[a,b]$ e

$$\int_A f = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \Big) dx \ . \tag{1.32}$$

Osservazione 5 La Proposizione 4 è una generalizzazione della Proposizione 3.
(ii) Un insieme di $\mathbb{R}^2$ della forma (1.30) prende il nome di **insieme normale** rispetto all'asse delle y.
(iii) Naturalmente, nella Proposizione 4, il ruolo della x e della y può essere scambiato (ed in tal caso l'insieme A in (1.30) con x e y scambiate prende il nome di "insieme normale rispetto all'asse delle x").
(iv) In particolare, prendendo $f \equiv 1$ si ottiene (come ci si aspetta)

$$\text{mis}_2(A) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx \ . \tag{1.33}$$

Dimostrazione Sia

$$c := \inf_{[a,b]} \alpha \ , \qquad d := \sup_{[a,b]} \beta \ , \qquad E := [a,b] \times [c,d] \ , \qquad M := \max\{\sup_A |f|, 1\} \ .$$

Si noti che $A \subset E$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per l'uniforme continuità di α e β su $[a,b]$ e di f su A, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\alpha(x) - \alpha(x')| \le \varepsilon \ , \quad |\beta(x) - \beta(x')| \le \varepsilon \ , \quad \forall\ x, x' \in [a,b] \ , \ |x - x'| \le \delta \ , \tag{1.34}$$

$$|f(x,y) - f(x',y')| \le \varepsilon \ , \quad \forall\ (x,y), (x',y') \in A \ , \ |(x,y) - (x',y')| \le \delta \ . \tag{1.35}$$

Sia $\{I_i\}$ una partizione di $[a,b]$ in intervalli non più lunghi di δ e siano

$$\alpha_i := \sup_{I_i} \alpha \ , \quad \alpha_i' := \inf_{I_i} \alpha \ , \quad \beta_i := \inf_{I_i} \beta \ , \quad \beta_i' := \sup_{I_i} \beta \ . \tag{1.36}$$

Dunque:

$$[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha(x), \beta(x)] \subset [\alpha_i', \beta_i'] \ , \qquad \forall\ i \ , \ \forall\ x \in I_i \ , \tag{1.37}$$

e (per (1.34)):

$$0 \le \beta_i' - \beta_i \le \varepsilon \ , \qquad 0 \le \alpha_i' - \alpha_i \le \varepsilon \ . \tag{1.38}$$

Si noti che potrebbe accadere che $\alpha_i > \beta_i$ per qualche i: in tal caso $[\alpha_i, \beta_i]$ è un intervallo vuoto e la lunghezza di $[\alpha_i', \beta_i']$ è piccola. Infatti, se denotiamo

$$\mathcal{I}_0 := \{i : \ \alpha_i > \beta_i\} \ , \qquad \mathcal{I}_1 := \{i : \ \alpha_i \le \beta_i\} \ ,$$

e se $i \in \mathcal{I}_0$, allora, per (1.34) (e per definizione di $\mathcal{I}_0$), si ha che

$$\beta_i' - \alpha_i' \le \beta_i' - \beta_i + \beta_i - \alpha_i' < \beta_i' - \beta_i + \alpha_i - \alpha_i' \le 2\varepsilon \ , \qquad \forall \ i \in \mathcal{I}_0 \ . \tag{1.39}$$

Definiamo, ora, i seguenti insiemi:

$$\begin{array}{l} J_i := [\alpha_i, \beta_i] \ , \quad J_i' := [\alpha_i', \beta_i'] \ , \quad R_i := I_i \times J_i \ , \quad R_i' := I_i \times J_i' \ , \\ A_1 := \cup R_i \ , \quad A_2 := \cup R_i' \ . \end{array}$$

Dimostriamo che A è misurabile. Si noti che A_1 e A_2 sono insiemi elementari e

$$A_1 \subset A \subset A_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_{A_1} \le \chi_A \le \chi_{A_2} \ .$$

Dunque, grazie a (1.34) e (1.39),

$$\begin{aligned} \int_E \chi_{A_2} - \chi_{A_1} &= \mathrm{mis}_2(A_2 \backslash A_1) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \mathrm{mis}_1(I_i) \ (\beta_i' - \alpha_i') + \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \mathrm{mis}_1(I_i) \ \big((\beta_i' - \beta_i) + (\alpha_i - \alpha_i')\big) \\ &\le \sum \mathrm{mis}_1(I_i) \ 2\varepsilon \\ &= c_1 \varepsilon \ , \qquad\qquad c_1 := 2(b-a) \ . \end{aligned} \tag{1.40}$$

Ovvero A è misurabile (essendo ε piccolo a piacere).
Definiamo

$$f_1 := \begin{cases} f \ , & \text{su } A_1 \\ -M \ , & \text{su } A_2 \backslash A_1 \\ 0 \ , & \text{su } E \backslash A_2 \end{cases} \ , \qquad f_2 := \begin{cases} f \ , & \text{su } A_1 \\ M \ , & \text{su } A_2 \backslash A_1 \\ 0 \ , & \text{su } E \backslash A_2 \end{cases} \ . \tag{1.41}$$

Dalla Proposizione 3 e dall'osservazione (8) di §1.2 segue che $f_i \in \mathcal{R}(E)$; inoltre

$$f_1 \le f_A \le f_2 \ .$$

Ora, (1.40) implica che

$$\begin{aligned} \int_E f_2 - f_1 &\le 2M \int_{A_2 \backslash A_1} 1 \\ &= 2M \ \mathrm{mis}_2(A_2 \backslash A_1) \\ &\le c_2 \varepsilon \ , \qquad\qquad c_2 := 4M(b-a) \ , \end{aligned} \tag{1.42}$$

il che, per l'arbitrarietà di ε (e per l'osservazione (9) di § 1.2), implica che f_A è integrabile su E ovvero che f è integrabile su A. Chiaramente da (1.40) segue anche che

$$\Big|\int_A f - \int_{A_1} f\Big| \le M\,\mathrm{mis}_2(A\backslash A_1) < c_2\varepsilon \ . \tag{1.43}$$

Dimostriamo ora che la funzione F di (1.31) è continua su $[a,b]$. Assumiamo, dapprima, che $x, x' \in I_i$ con $i \in \mathcal{I}_0$: in tal caso, grazie a (1.39),

$$\begin{aligned} |F(x)-F(x')| &= \Big|\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy - \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x',y)dy\Big| \\ &\le \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} |f(x,y)|dy + \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} |f(x',y)|dy \\ &\le M\Big(\beta(x)-\alpha(x)+\beta(x')-\alpha(x')\Big) \\ &\le 2M(\beta_i'-\alpha_i') \le 4M\varepsilon \ . \end{aligned} \tag{1.44}$$

Assumiamo, ora, che $x, x' \in I_i$ con $i \in \mathcal{I}_1$: in tal caso

$$\alpha(x) \le \alpha_i \le \beta_i \le \beta(x) \ , \qquad \alpha(x') \le \alpha_i \le \beta_i \le \beta(x') \ ,$$

e, per (1.37), (1.38) e per (1.35), si ha che

$$\begin{aligned} |F(x)-F(x')| &= \Big| \int_{\alpha(x)}^{\alpha_i} f(x,y)dy + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x,y)dy + \int_{\beta_i}^{\beta(x)} f(x,y)dy \\ &\quad - \int_{\alpha(x')}^{\alpha_i} f(x',y)dy - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x',y)dy - \int_{\beta_i}^{\beta(x')} f(x',y)dy\Big| \\ &\le \int_{\alpha(x)}^{\alpha_i} |f(x,y)|dy + \int_{\beta_i}^{\beta(x)} |f(x,y)|dy \\ &\quad + \int_{\alpha(x')}^{\alpha_i} |f(x',y)|dy + \int_{\beta_i}^{\beta(x')} |f(x',y)|dy \\ &\quad + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f(x,y)-f(x',y)|dy \\ &\le 2M\Big(\alpha_i-\alpha_i'+\beta_i'-\beta_i) + \varepsilon(\beta_i-\alpha_i) \\ &\le c_3\varepsilon \ , \qquad c_3 := 4M + (d-c) \ . \end{aligned} \tag{1.45}$$

Da (1.44) e (1.45) segue che

$$|F(x)-F(x')| \le c_3\varepsilon \ , \qquad \forall\ x, x' \in I_i \ , \quad \forall\ i \ ; \tag{1.46}$$

ma tale relazione implica che[1]

$$|F(x)-F(x')| \le 2c_3\varepsilon \ , \qquad \forall\ x, x' \in [a,b] \ , \quad |x-x'| < \delta \ .$$

[1]Infatti, se $|x-x'| < \delta$ allora o x e x' appartengono ad uno stesso I_i oppure appartengono a due I_i contigui.

Per l'arbitrarietà di ε segue che F è continua su $[a,b]$.
Rimane da dimostrare (1.32).

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_{A_1} f - \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big| & \\
&= \Big|\sum_i \int_{I_i}\Big(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x,y)dy - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big| \\
&= \Big|\sum_i \int_{I_i}\Big(\int_{\alpha_i}^{\alpha(x)} f(x,y)dy + \int_{\beta(x)}^{\beta_i} f(x,y)dy\Big)dx\Big| \\
&\leq \sum_i \int_{I_i}\Big(\int_{\alpha(x)}^{\alpha_i} |f(x,y)|dy + \int_{\beta_i}^{\beta(x)} |f(x,y)|dy\Big)dx \\
&\leq 2M\varepsilon \sum_i \mathrm{mis}_1(I_i) = 2M(b-a)\varepsilon \\
&\leq c_2\varepsilon\ .
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme tale relazione e (1.43) si ha che

$$
\Big|\int_A f - \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big| \ \leq \ 2c_2\varepsilon\ ,
$$

che, per l'arbitrarietà di ε, implica (1.32). ∎