Prova scritta di AM3 del 13/6/2003 – (II Esonero)

1) Discutere le superfici e i solidi di rotazione in $\mathbb{R}^3$.

2) Enunciare e dimostrare la formula di riduzione (tramite integrali iterati) per funzioni continue su rettangoli in $\mathbb{R}^2$.

3) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0$. Dimostrare che una 1-forma differenziale ω è chiusa su A se e solo se ω è ivi esatta.

4) Sia T il triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Calcolare

$$\int_T (x + y)(2x - y)\ dxdy\ ,$$

sia direttamente che usando il cambio di variabili $u = x + y$, $v = 2x - y$.

5) Siano S, D e γ i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\ , z > 0\}\ , \quad \gamma = \{x^2+y^2 = 1\ , z = 0\}\ , \quad D = \{x^2+y^2 \leq 1\ , z = 0\}\ ,$$

e sia

$$\vec{F} = \Big(\frac{y}{1+z^2}, x^5 z^{100} - y, z + x^2\Big)\ .$$

(i) Si usi il teorema della divergenza per calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ dove $\vec{n}$ è la normale esterna alla superficie chiusa $\Sigma := S \cup D$.
(ii) Si calcoli $\int_{\gamma^+} \omega^1_{\vec{F}}$, dove γ^+ è la curva γ orientata in senso antiorario nel piano $\{z = 0\}$.
(iii) Si verifichi il teorema di Stokes per il campo $\vec{F}$ sulla superficie S.

6) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{y^2}{\tan x} d\ell$, dove γ è la curva $\{y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$.