SOLUZIONI

-10/03/2003-
Dott. Laura Di Gregorio

1. Basta dimostrare che lo spazio delle matrici $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ con norma $\|A\| = \sup_{\{x\,:\,|x|\neq 0\}} |Ax|$ è completo.
Consideriamo una successione di Cauchy di matrici $\{A^k\}$.
Allora $\left\{(a_{ij})^k_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots m}}\right\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ dove (a_{ij}) è l'elemento generico della matrice A.
Essendo $\mathbb{R}$ uno spazio completo abbiamo che $\{(a_{ij})^k\}$ ammette limite in $\mathbb{R}$.
Sia $(\overline{a}_{ij})$ tale limite.
Alla convergenza della successione di matrici corrisponde la convergenza elemento per elemento e dunque la matrice di elementi $(\overline{a}_{ij})$ sarà il limite della successione $\{A^k\}$.

2. Dimostriamo l'equivalenza di $\|x\|_1$ e $\|x\|_2 = |x|$.

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2$$

da cui segue che $|x| \leq \|x\|_1$. D'altra parte

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\,|x|$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy.
Abbiamo ottenuto

$$|x| \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,|x|.$$

Le altre equivalenze sono ovvie.

3. Consideriamo una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente nella norma del sup ad un certo limite.
Per come è stato definito, il funzionale F è lineare in u, dunque basta dimostrare che se $\|u_n\|_\infty \to 0$ allora $\|F(u_n)\|_{L^1} \to 0$.

$$\|F(u_n)\|_{L^1([0,1])} = \int_0^1 |F(u_n)(x)|\,dx = \int_0^1 |u_n(x^2)|\,dx.$$

Cambiando variabile $x = \sqrt{y}$ otteniamo

$$\int_0^1 |u_n(x^2)|\,dx = \int_0^1 \frac{|u_n(y)|}{2\sqrt{y}}\,dy.$$

E' facile osservare che

$$\int_0^1 \frac{|u_n(y)|}{2\sqrt{y}}\,dy \quad \leq \quad \sup_{y\in[0,1]} |u_n(y)| \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \sup_{y\in[0,1]} |u_n(y)| = \|u_n\|_\infty.$$

Abbiamo ottenuto che

$$\|F(u_n)\|_{L^1([0,1])} \leq \|u_n\|_\infty.$$

Segue che F è continuo.